This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google

University of Wisconsin
LIBRARY

Class TN
Book .D44
2

Digitized by Google

Digitized by Google

TRAITÉ

D'ÉLECTRICITÉ INDUSTRIELLE

THÉORIQUE ET PRATIQUE

ÉLECTRO-CINÉTIQUE. ÉLECTRO-MAGNÉTISME

ÉLECTRO-DYNAMIQUE

INDUCTION ÉLECTRO-MAGNÉTIQUE

Digitized by Google

Digitized by Google

TRAITÉ

D'ÉLECTRICITÉ INDUSTRIELLE

THÉORIQUE ET PRATIQUE

PAR

MARCEL DEPREZ

PROFESSEUR SUPPLÉANT AU COLLEGE DE FRANCE
MEMBRE DE L'INSTITUT
PROFESSEUR D'ÉLECTRICITÉ INDUSTRIELLE AU CONSERVATOIRE NATIONAL
DES ARTS ET MÉTIERS

2e FASCICULE

ÉLECTRO-CINÉTIQUE. ÉLECTRO-MAGNÉTISME

ÉLECTRO-DYNAMIQUE. INDUCTION ÉLECTRO-MAGNÉTIQUE

PARIS
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE BAUDRY ET Cie, ÉDITEURS
15, RUE DES SAINTS-PÈRES, 15
MAISON A LIÉGE, 21, RUE DE LA RÉGENCE

1898

Tous droits réservés.

Digitized by Google

Digitized by Google

55196
OCT 9 1900
6967737
IN
D-1-1

TROISIÈME PARTIE

ÉLECTRO-CINÉTIQUE

CHAPITRE PREMIER

LOIS D'OHM

§ 1. — GÉNÉRALITÉS.

286. — Propagation de l'état électrique entre deux corps reliés par un conducteur. — Lorsqu'on réunit par un conducteur deux corps électrisés à des potentiels différents, l'expérience montre que, au bout d'un temps très court, les deux corps, ainsi que le conducteur, atteignent le même potentiel dans toute leur étendue. Celui dont le potentiel était le plus élevé perd une partie de sa charge, tandis que la charge de celui dont le potentiel était le plus faible augmente d'une quantité rigoureusement égale, en considérant toutefois comme négligeable la capacité du conducteur. Nous avons donné précédemment les équations qui permettent de calculer le potentiel commun et la charge de chacun des deux corps lorsque l'équilibre est établi.

Ce phénomène, ainsi d'ailleurs que tous les phénomènes physiques, n'est pas instantané. Sa durée dépend de la différence de potentiel des deux corps, de la longueur, de la section, de la

Digitized by Google

substance du conducteur et enfin de la capacité des deux corps et de celle du conducteur. Nous verrons même plus tard que, non seulement il n'est pas instantané, mais que théoriquement sa durée est infinie. Aussi pour éviter toute ambiguïté convient-il de considérer, au lieu de la durée totale du phénomène, le temps nécessaire pour que le premier corps cède au second une portion déterminée de sa charge primitive.

Nous sommes donc amenés à traiter la question suivante : Etant donnés deux corps A et B dont les potentiels sont respectivement V_0 et V_1, trouver la quantité d'électricité qui passe de l'un à l'autre pendant un temps très court *dt* lorsqu'on les réunit par un conducteur. Or, les principes sur lesquels nous nous sommes appuyés jusqu'à présent permettent bien de trouver la grandeur des variations de potentiel et de charge du second corps lorsqu'on connaît les changements survenus dans l'état électrique du premier, mais ne peuvent nous donner aucune indication concernant le temps nécessaire pour que ces variations s'accomplissent; l'expérience seule peut nous renseigner à cet égard.

287. — Intensité du courant électrique. — Si les deux corps A et B ont des capacités extrêmement grandes et si le temps pendant lequel on les réunit par un conducteur est très petit, la quantité d'électricité perdue par A et gagnée par B sera également très petite et par suite, les variations de potentiel des deux corps seront aussi suffisamment petites pour qu'on puisse considérer V_0 et V_1 comme constants pendant la durée de la réunion des deux corps. Car la charge Q, le potentiel V et la capacité C de chacun d'eux doivent toujours satisfaire à la relation

$$V = \frac{Q}{C}.$$

L'expérience apprend que la quantité *dq* d'électricité cédée par celui des deux corps dont le potentiel est le plus élevé au second corps, est proportionnelle : au temps *dt* supposé très court pendant lequel la communication est établie ; à la différence de potentiel

Digitized by Google

$V_0 - V_1$; à la section s du conducteur; inversement proportionnelle à sa longueur l et enfin variable avec la substance du conducteur. Elle peut donc être représentée par une expression de la forme

$$dq = k \frac{s}{l} (V_0 - V_1) dt,$$

dans laquelle k est un coefficient qui dépend de la nature du conducteur.

Si, pendant que les deux corps sont réunis par le conducteur, on pouvait, par un procédé quelconque, maintenir constante la valeur de leurs potentiels, cette relation nous montre que les quantités d'électricité perdues par le premier et gagnées par le second seraient égales pendant des temps successifs égaux, de sorte que la quantité totale q d'électricité ainsi déplacée au bout d'un temps t, aurait pour valeur

$$q = \frac{ks}{l} (V_0 - V_1) t$$

d'où

$$\frac{q}{t} = \frac{ks}{l} (V_0 - V_1).$$

Le quotient $\frac{q}{t}$ a reçu le nom d'*Intensité du courant électrique*. On voit que c'est la quantité d'électricité qui passe de A en B pendant l'unité de temps lorsque la différence de potentiel $V_0 - V_1$ est maintenue invariable.

C'est le physicien Allemand Ohm qui a formulé le premier les lois représentées par la formule ci-dessus. Il les avait trouvées par le calcul en assimilant les quantités d'électricité à des quantités de chaleur, les différences de potentiel (qu'il appelait différence de tension) à des différences de température.

Il appliquait d'ailleurs à la propagation de l'électricité, les équations que le géomètre Français Fourier avait établies pour représenter la propagation de la chaleur dans une barre métallique dont les extrémités sont maintenues à des températures différentes mais constantes; la barre étant supposée entourée d'une enveloppe imperméable à la chaleur.

Digitized by Google

288. — Etat permanant. — Etat véritable. — L'intensité du courant n'est représentée par la formule simple que nous venons de donner que lorsque la communication entre les corps A et B supposés maintenus aux potentiels V_0 et V_1 est déjà établie depuis un certain temps. On dit alors que le courant a atteint son *état permanent*. Mais entre l'instant où la communication est établie et celui où l'état permanent est atteint, la valeur du courant électrique obtenue en divisant la quantité infiniment petite d'électricité dq cédée par A et reçue par B, par le temps infiniment petit dt pendant lequel cet échange a lieu, passe par toutes les valeurs comprises entre zéro et sa valeur permanente. Elle peut même être oscillante comme nous le verrons plus tard. On dit alors que le courant est dans la phase d'*état variable*.

L'étude de cette seconde phase est très importante, mais elle est très compliquée et doit, pour être faite avec fruit, être précédée de l'étude des lois beaucoup plus simples de l'état permanent ainsi que de celles de l'Induction électro-magnétique. L'ensemble des lois qui régissent ces deux états du courant électrique a reçu le nom d'Electro-cinétique.

§ 2. — CONDUCTIBILITÉ. — RÉSISTANCE. — RÉSISTANCE SPÉCIFIQUE.

289. — Définitions. — En désignant par I l'intensité du courant arrivé à l'état permanent, (ce qui a lieu en général dans un temps extrêmement court) on a par définition

$$I = \frac{q}{t},$$

ou, en raison de l'équation précédente (287)

$$I = \frac{ks}{l}(V_0 - V_1),$$

qui nous fait connaître le nombre d'unités de quantité électrique qui, dans l'unité de temps, disparaît du point A et apparaît au point B.

Si on voulait appliquer cette formule en se servant des unités

Digitized by Google

électro-statiques telles que nous les avons définies au moyen de la loi de Coulomb, il faudrait exprimer s en centimètres carrés, l en centimètres et $(V_0 - V_1)$ en unités de potentiel électro-statique (chacune de ces unités valant 300 volts ainsi que nous l'avons expliqué précédemment); il resterait à déterminer le facteur k. On y arriverait en faisant $s = 1$, $l = 1$, $V_0 - V_1 = 1$, et on aurait alors

$$1 = k.$$

D'où cette définition du facteur k : *C'est l'intensité du courant qui traverserait un conducteur de un centimètre de longueur et de un centimètre carré de section, dont les deux faces perpendiculaires à la direction du courant auraient entre elles une différence de potentiel égale à l'unité.* On a donné à ce facteur k qui varie avec la substance du conducteur le nom de *conductibilité.*

On peut encore mettre la valeur de I sous la forme

$$I = \frac{V_0 - V_1}{\frac{1}{k} \cdot \frac{l}{s}},$$

ou, en posant

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{l}{s} = R,$$

$$I = \frac{V_0 - V_1}{R}.$$

La quantité R a reçu le nom de *résistance* du conducteur; on voit que, à dimensions égales, elle dépend du facteur $\frac{1}{k}$ dont la signification physique apparaît immédiatement si dans l'expression de R on fait $l = 1$, $s = 1$; il vient alors

$$R = \frac{1}{k}.$$

Ainsi le facteur $\frac{1}{k}$ est égal à la résistance d'un conducteur de 1 centimètre de longueur et de 1 centimètre de section fait avec la substance considérée. Il constitue ce qu'on appelle la *résistance spécifique* de cette substance; en la désignant par ρ, la valeur du

Digitized by Google

courant devient

$$I = \frac{V_0 - V_1}{\rho \frac{l}{s}}.$$

290. — Relations algébriques entre les dimensions d'un conducteur et sa résistance. — La résistance d'un conducteur ayant pour expression

$$R = \rho \frac{l}{s},$$

son volume u est donné par la relation

$$u = ls$$

et son poids p est, en désignant par δ le poids de l'unité de volume du métal du conducteur,

$$p = u\delta = \delta ls.$$

En combinant entre elles ces équations, on arrive aux formules suivantes qui sont très utiles dans les applications :

$$R = \rho \frac{u}{s^2}, \qquad R = \rho \frac{l^2}{u}, \qquad R = \rho \frac{p}{\delta s^2}, \qquad R = \rho\delta \frac{l^2}{p},$$

$$l = \frac{Rs}{\rho}, \qquad l = \sqrt{\frac{Ru}{\rho}}, \qquad l = \sqrt{\frac{pR}{\rho\delta}},$$

$$s = \rho \frac{l}{R}, \qquad s = \sqrt{\frac{\rho u}{R}}, \qquad s = \sqrt{\frac{\rho p}{\delta R}},$$

$$u = \frac{\rho l^2}{R}, \qquad u = \frac{Rs^2}{\rho}, \qquad p = \frac{\rho\delta l^2}{R}, \qquad p = \frac{\delta s^2 R}{\rho}.$$

291. — Unités d'intensité de courant et de résistance adoptées dans la pratique. — Nous avons pu jusqu'à présent définir l'intensité d'un courant électrique en nous appuyant uniquement sur les définitions et les lois des phénomènes électro-statiques. Nous pourrions même, en nous appuyant sur cette définition, *simuler* un courant électrique en faisant glisser le long d'un fil une série de petites sphères chargées d'électricité qui *transporteraient*, dans l'unité de temps, du point A au point B une certaine quantité d'é-

Digitized by Google

lectricité. Le résultat de cette relation satisferait rigoureusement à la relation

$$I = \frac{q}{t},$$

mais le fil le long duquel s'effectuerait le transport ou, plus exactement, ce chapelet de petites sphères électrisées en mouvement, jouirait-il des propriétés physiques qui appartiennent au courant électrique?

Cette question n'est pas, dans l'état actuel de la science, susceptible d'une réponse entièrement affirmative ou négative. Nous verrons, en effet, dans une autre partie de ce livre, que le Professeur Rowland a cru reconnaître dans un disque électrisé, animé d'une très grande vitesse, des propriétés magnétiques analogues à celles d'un fil qui réunit deux corps électrisés à des potentiels différents. Nous avons en outre établi qu'il y a équivalence entre l'énergie d'une décharge électrique échangée entre deux corps électriques et le travail mécanique accompli par des sphères matérielles transportant d'un corps à l'autre une quantité d'électricité égale à celle qui entre en jeu pendant la décharge. Il n'y aurait donc rien que de très acceptable dans la définition d'un courant d'après le nombre d'unités électro-statiques passant d'une extrémité à l'autre du conducteur dans l'unité de temps, si l'on n'avait découvert tout un ensemble de phénomènes auxquels on a donné le nom d'Électro-magnétisme et qui permettent de mesurer et de définir l'intensité d'un courant d'une manière beaucoup plus commode, bien qu'elle n'ait aucun rapport direct avec la notion de quantité d'électricité ni avec les actions mécaniques qui nous ont servi à établir tous les théorèmes de l'électro-statique.

Les unités, dites *pratiques*, dont on se sert constamment dans l'industrie électrique pour définir la différence de potentiel, l'intensité d'un courant, la résistance d'un conducteur, sont d'un emploi tellement fréquent qu'il nous paraît nécessaire de les faire connaître dès à présent sans attendre que nous en soyons arrivés au chapitre qui traitera de l'Électro-magnétisme.

L'unité de quantité électrique pratique à laquelle on a donné le

Digitized by Google

nom de *Coulomb* est équivalente à un nombre d'unités électro-statiques, telles que nous les avons définies, égal à 3 000 000 000. Ce nombre résulte de nombreuses expériences et il concorde avec les déductions théoriques de Maxvell.

L'unité de potentiel pratique a reçu le nom de *Volt*. Elle a été choisie de façon que le travail mécanique produit par une unité de quantité pratique (Coulomb) soit égal à 10 000 000 d'*ergs*, lorsque cette unité de quantité passe d'un point A à un point B ayant un potentiel inférieur de 1 *Volt* à celui du point A.

Or le travail (exprimé en ergs) produit par 3 000 000 000 d'unités électro-statiques, passant d'une position à une autre dont le potentiel est différent, est égal au produit obtenu en multipliant ce nombre d'unités par la différence de potentiel des deux points. On a donc, en désignant par v la valeur du Volt

$$3000000000 \times v = 10000000,$$

d'où

$$v = \frac{1}{300}.$$

Ainsi le *Volt* équivaut, comme nous l'avons déjà dit, (mais sans donner aucune explication à ce sujet), à $\frac{1}{300}$ d'unité de potentiel électro-statique.

L'unité pratique d'intensité d'un courant, c'est-à-dire celle du courant équivalent à un *Coulomb* par seconde s'appelle l'*Ampère*. Elle équivaut à 3 000 000 000 d'unités d'intensité électro-statiques.

Enfin l'unité pratique de résistance à laquelle on a donné le nom d'*Ohm* ne pourra être définie que lorsque nous étudierons l'électro-magnétisme.

Nous nous bornerons, quant à présent, à dire qu'elle est choisie de façon qu'un conducteur dont la résistance est égale à un Ohm laisse passer un courant d'un Ampère lorsque la différence de potentiel de ses extrémités est égale à 1 Volt. Elle est représentée matériellement par la résistance d'une colonne de mercure de 1 millimètre carré de section et de $1^m,063$ de longueur.

Nous pouvons facilement trouver maintenant quelle serait, en

Digitized by Google

Ohms, l'unité de résistance électro-statique. L'équation

$$I = \frac{V_0 - V_1}{R},$$

donne

$$R = \frac{V_0 - V_1}{I}.$$

Si on prend $V_0 - V_1$ égal à 1 Volt $\left(\text{ou } \frac{1}{300} \text{ d'unité électro-statique}\right)$ et I égal à 1 ampère (ou 3000000000 d'unités électro-statiques), on trouve

$$R = 1 \text{ Ohm} = \frac{\frac{1}{300}}{3000000000} = \frac{1}{900000000000} \text{ Unités électro-statiques.}$$

Donc l'unité électro-statique de résistance vaut

$$9 \times 10^{11} \text{ Ohms.}$$

292. — Influence de la température sur la résistance spécifique des métaux. — L'expérience prouve que la résistance spécifique d'un métal varie avec la température. Cette variation est même pour certains métaux, le cuivre par exemple, d'une régularité telle qu'elle peut servir à la mesure des températures.

En ce qui concerne le cuivre, la résistance R d'un fil à la température t est représentée avec une grande exactitude par la formule

$$R = R_0(1 + kt),$$

R_0 étant la résistance mesurée à la température de la glace fondante. Si on exprime t en degrés centigrades, le coefficient k a pour valeur 0,0038 suivant la plupart des auteurs, et 0,0040 suivant M. Mouchel qui a opéré sur des cuivres électrolytiques très purs. Ajoutons que ce coefficient k paraît constant dans les limites de température les plus écartées qu'il ait été possible de réaliser sans altérer la structure du métal.

M. Cailletet qui a mesuré la valeur de k aux températures très basses, a trouvé pour le cuivre les résultats suivants :

Digitized by Google

Limites de température				Valeur de k
de	0°	à	— 58°,2	0,00418
de	— 68°,6	à	— 101°,3	0,00426
de	— 113°	à	— 122°,8	0,00424.

La valeur de k trouvée par MM. Mathiessen et Benoît diffère notablement du nombre moyen 0,00421 déduit des expériences de M. Cailletet; ils ont trouvé en effet pour le cuivre $k = 0{,}00367$ ou 0,003637 (1).

On verra d'ailleurs, dans le tableau qui donne la valeur des résistances spécifiques et des coefficients de variation thermiques, que *pratiquement* la valeur de k est sensiblement la même pour la plupart des métaux et que, par une coïncidence qui ne peut être un simple effet du hasard, elle diffère très peu du coefficient de dilatation des gaz dits permanents, de sorte que les formules qui représentent le volume ou la pression d'une masse gazeuse en fonction de la température sont algébriquement identiques à celles qui représentent la résistance d'un conducteur métallique. On conclut de là que s'il était possible de réaliser une température voisine du *zéro absolu* qui a pour valeur l'inverse du coefficient de dilatation des gaz parfaits, c'est-à-dire $\frac{1}{0{,}00367}$, la propriété à laquelle on a donné le nom de *résistance* disparaîtrait.

En admettant pour le cuivre la valeur moyenne $k = 0{,}004$, on peut mettre l'expression de la résistance sous une forme très commode dans les applications. On a, en effet, en désignant par R_0 la résistance d'un conducteur à la température de la glace fondante, par R et R′ les valeurs que prend cette même résistance aux températures t et t',

$$R = R_0(1 + kt), \qquad R' = R_0(1 + kt'),$$

d'où

$$R' = R\,\frac{1 + kt'}{1 + kt} = \frac{t' + \frac{1}{k}}{t + \frac{1}{k}}.$$

(1) M. Guillaume a adopté pour représenter la résistance du mercure à la température t la formule suivante :

$$r_t = r_0(1 + 0{,}0088841 + 0{,}000101t^2),$$

r_0 étant la résistance mesurée à la température de la glace fondante.

Digitized by Google

Mais en prenant $k = 0{,}004$ on a

$$\frac{1}{k} = 250,$$

d'où

$$R' = \frac{t' + 250}{t + 250} R.$$

293. — Mesure des températures au moyen de la mesure de résistance d'un conducteur. — On peut aussi se servir de ces équations pour trouver la variation $t' - t$ de température lorsqu'on connaît la variation de résistance. On a en effet

$$t' - t = \frac{R' - R}{R}\left(t + \frac{1}{k}\right),$$

ou

$$t' - t = \frac{R' - R}{R}(t + 250).$$

Si on comptait les températures à partir de 250° au-dessous du zéro ordinaire, on aurait, en posant

$$T' = t' + 250, \qquad T = t + 250,$$

$$\frac{T' - T}{T} = \frac{R' - R}{R},$$

équation qui signifie, en langage ordinaire, que l'accroissement relatif $\frac{T' - T}{T}$ de ce qu'on pourrait appeler sans erreur notable la température absolue (1), est égal à l'accroissement relatif $\frac{R' - R}{R}$ de la résistance.

La mesure de la résistance d'un conducteur est le moyen le plus exact que l'on possède pour connaître sa *température moyenne*, c'est-à-dire la moyenne arithmétique des températures de chaque unité de longueur de ce conducteur.

Supposons en effet que l'on ait décomposé un conducteur en une série de tronçons égaux suffisamment petits pour qu'on puisse con-

(1) On sait que la *température absolue* a pour expression la température ordinaire en degrés centigrades augmentée de 273 degrés.

Digitized by Google

sidérer chacun d'eux comme possédant la même température dans toute sa longueur. Ces tronçons, de même longueur et de même substance, ont évidemment la même résistance lorsqu'ils ont la même température. Appelons r_0 cette résistance mesurée à la température de la glace fondante; désignons par r_1, r_2, ..., r_n la résistance du premier, du second, ... du n^{me} tronçon, lorsqu'ils sont respectivement portés à des températures représentées par t_1, t_2, ... t_n; et désignons par k le coefficient de variation de résistance correspondant à une variation de température de 1 degré. Nous aurons les équations suivantes

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0(1 + kt_1), \\ r_2 &= r_0(1 + kt_2), \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ r_n &= r_0(1 + kt_n). \end{aligned}$$

Ajoutant ces équations membre à membre, il vient en désignant par n le nombre des tronçons

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = nr_0 + kr_0(t_1 + t_2 + \cdots + t_n)$$

d'où

$$\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n} = \frac{(r_1 + r_2 + \cdots + r_n) - nr_0}{knr_0}.$$

Mais nous verrons bientôt que la résistance totale d'un conducteur est égale à la somme des résistances de tous les tronçons qui, placés bout à bout, constituent ce conducteur. Donc la somme $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ est égale à la résistance totale R du conducteur mesurée par des procédés que nous ferons connaître plus loin, et il vient, en remarquant que

$$\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n}$$

est la température moyenne cherchée t_m, et que le terme nr_0 n'est autre chose que la résistance totale R_0 du conducteur supposé ramené à la température de la glace fondante dans toute sa longueur

$$t_m = \frac{R - R_0}{kR_0}.$$

La formule

$$R = \rho \frac{l}{s},$$

Digitized by Google

nous donne, lorsque le conducteur est un fil cylindrique de diamètre d et que l'on remplace s par sa valeur $\frac{\pi d^2}{4}$,

$$R = \frac{4\rho l}{\pi d^2}.$$

La résistance d'un fil cylindrique est donc en raison inverse du carré de son diamètre; il en résulte qu'un fil très court peut cependant avoir une très grande résistance si on le prend très fin. Etant très court et très fin, il pourra avoir une masse inappréciable tout en ayant une résistance notable; il pourra donc prendre instantanément la température du milieu dans lequel il sera plongé et la mesure de cette température étant, comme nous venons de le montrer, ramenée à celle de son accroissement de résistance, il en résulte que l'on pourra mesurer la température comme on le ferait avec *un thermomètre dépourvu de masse*. Ce procédé constitue donc le moyen le plus parfait qui existe pour la mesure des températures variables. Aussi a-t-il été mis à profit avec succès par M. Langley dans son *Bolomètre*.

294. — Influence de la température sur la résistance électrique de certains alliages. — Nous venons de dire que le coefficient de variation thermique des corps simples métalliques varie peu d'un métal à l'autre, tandis que leurs résistances présentent au contraire des différences considérables. Ce fait très remarquable et qui conduira peut-être à la découverte d'une relation encore inconnue entre l'électricité et la chaleur, n'a plus lieu, lorsqu'au lieu des métaux à l'état de pureté, on considère les alliages métalliques. Ces derniers, en effet, ont des coefficients de variation thermiques extrêmement différents les uns des autres et on est même parvenu à réaliser des alliages pour lesquels ce coefficient est à peine appréciable et *peut même devenir négatif*. C'est là une propriété précieuse pour la construction des étalons de résistance, puisque cela dispense de corrections de température toujours délicates et souvent incertaines, en raison de laquelle ces alliages devraient toujours être employés dans la construction des bobines des *voltmètres*

Digitized by Google

électro-magnétiques (1) qui servent dans les usines électriques à la mesure des différences de potentiel. Mais cette propriété est accompagnée d'une autre que l'on constate également dans tous ces alliages, et qui, si elle les rend éminemment propres à la construction d'étalons de résistance de petite dimension, est parfois nuisible à certains égards dans la construction des voltmètres; ils sont tous doués, en effet, d'une très grande résistance spécifique. Parmi eux, le plus remarquable paraît être celui qui est connu sous le nom de *alliage I^a I^a doux;* il a une résistance spécifique de 47,1 microhms $\left(\text{le microhm vaut } \frac{1}{1\,000\,000} \text{ d'Ohm}\right)$ et un coefficient de variation thermique égal à $\frac{1}{200\,000}$, c'est-à-dire 800 fois moindre que celui du cuivre. Sa résistance spécifique est, il est vrai, environ trente fois aussi grande.

295. — Résistance des liquides. — Les liquides contenus dans des tubes isolants d'un petit diamètre et d'une grande longueur présentent, au point de vue de la conductibilité électrique, des propriétés analogues à celles des tiges métalliques mais, si on en excepte le mercure, ils donnent lieu à un phénomène que nous étudierons en traitant des propriétés chimiques du courant électrique et qui complique notablement les lois que nous venons d'exposer en parlant des métaux. Ce phénomène consiste en ce que le passage du courant donne naissance à une *force électro-motrice* inverse qui s'ajoute à la résistance propre de la colonne liquide, mais qui est indépendante de la longueur et de la section de cette colonne. La résistance spécifique des liquides, même les plus conducteurs, est immense lorsqu'on la compare à celle des métaux. Ainsi la résistance spécifique d'une dissolution d'acide sulfurique dans l'eau, dont la densité est égale à 1,10, est représentée par $0^{\omega},88$ (2) tandis que

(1) Nous désignons ainsi, par opposition aux voltmètres électro-statiques déjà décrits, les instruments dans lesquels on met à profit les propriétés que possède le courant électrique de produire des actions mécaniques en agissant, soit sur un autre courant, soit sur un aimant temporaire ou permanent.

(2) L'Ohm est désigné par la lettre ω placée en exposant.

Digitized by Google

celle du cuivre pur a pour valeur $0^{\omega},0000016$. Le rapport de ces deux nombres est égal à 550 000. La résistance spécifique de l'eau *presque pure* dépasse 9000^{ω}. Elle dépasse donc cinq milliards de fois celle du cuivre.

La température exerce sur la résistance spécifique des liquides une influence inverse de celle qu'elle exerce sur les conducteurs métalliques et beaucoup plus considérable. Ainsi, la solution d'acide sulfurique que nous venons de prendre pour exemple possède, à la température de 14°, une résistance spécifique égale à $0^{\omega},88$; mais à 24° cette résistance spécifique tombe à $0^{\omega},73$. Ces nombres vont nous permettre de déterminer k en supposant bien entendu que ce nombre soit constant. Nous avons en effet en appelant r_0, r, et r' les valeurs de la résistance spécifique aux températures zéro, t, t'

$$r = r_0(1 + kt),$$

$$r' = r_0(1 + kt'),$$

d'où

$$\frac{r'}{r} = \frac{1 + kt'}{1 + kt}.$$

Cette dernière équation donne

$$k = \frac{r - r'}{r't - rt'}.$$

En remplaçant les lettres par leur valeur numérique, on trouve

$$k = -0{,}01376,$$

nombre *négatif* et qui, en valeur absolue, est presque trois fois et demie aussi grand que le coefficient de variation thermique du cuivre.

296. — Résistance des diélectriques. — Les corps isolants ou diélectriques ont une résistance spécifique beaucoup plus grande que celle des liquides conducteurs. La température exerce sur la résistance de certains d'entre eux, comme le caoutchouc et la gutta-percha, une influence bien plus considérable qu'elle n'en a sur la résistance des corps métalliques. On constate également sur les deux derniers corps une influence de la pression qui n'existe ni dans les métaux, ni dans les corps vitreux, ni dans les corps liquides.

Digitized by Google

Mais cela tient probablement à ce que la gutta-percha et le caoutchouc ont une contexture spongieuse.

297. — Résistance des gaz. — Les gaz peuvent être considérés comme ayant une résistance infinie, et cependant ils peuvent, dans le cas où on emploie de très hauts potentiels, donner passage à un courant électrique très faible, il est vrai. On admet généralement que ce n'est pas en vertu d'une conductibilité proprement dite, telle que nous l'avons défini plus haut, que ce courant peut se produire mais qu'il est dû à une *convection* de l'électricité, absolument comme dans l'expérience bien connue de la décharge graduelle d'un condensateur au moyen de balles de sureau oscillant entre des plateaux communiquant avec les deux armatures. Cependant lorsque la température est très élevée, cette sorte de conductibilité augmente rapidement ; il en est de même quand la pression du gaz diminue à moins qu'elle ne soit extrêmement petite, car *le meilleur isolant est un vide aussi parfait que possible*. Toutes les recherches expérimentales entreprises sur ce sujet ont montré en effet que l'étincelle électrique ne peut pas éclater dans un vide parfait, même lorsque l'intervalle à franchir est très petit et les potentiels très élevés.

§ 3. — FORCE ÉLECTRO-MOTRICE.

298. — Définition. — Nous venons de voir que dans un conducteur parcouru par un courant, la différence de potentiel entre deux points voisins est proportionnelle à l'intensité du courant. Elle est donc nulle en même temps que le courant. Cependant il n'en est pas toujours ainsi et dans un grand nombre de circonstances, un fil métallique dont les extrémités ne sont réunies par aucun conducteur et qui ne peut donner par conséquent passage à un courant, peut avoir dans certaines portions de sa longueur des potentiels différents. Ce fait, absolument contraire en apparence au théorème fondamental démontré dans l'électro-statique (62), et en vertu duquel tous les points d'un corps conducteur sont au même potentiel, ne peut être

Digitized by Google

dû qu'à l'existence d'une cause de rupture de l'équilibre électrique à laquelle, (par analogie avec les causes qui modifient l'équilibre mécanique d'un système matériel), on a donné le nom de *Force électro-motrice*. Ainsi, par exemple, un fil rectiligne qui se déplace dans un champ magnétique est, en général, le siège d'une force électro-motrice qui se traduit par une différence de potentiel de ses deux extrémités. La grandeur de cette différence de potentiel sert de mesure à la force électro-motrice qui est par conséquent évaluée en unités de mêmes dimensions qu'elle.

299. — Expression du courant engendré dans un circuit fermé contenant une force électro-motrice. — Soit ABCD (fig. 150) un circuit métallique dont l'une des portions, AD, est douée de la propriété de développer une *f. e. m.* (force électro-motrice) tout en présentant, comme le reste du circuit, une résistance r qui dépend de sa longueur, de sa section et de la nature du métal dont elle est formée.

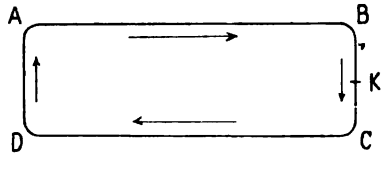

Fig. 150

Coupons d'abord le circuit au point K; la *f. e. m.* développée par le côté AD va, d'après ce que nous venons de dire, porter les points A et D à des potentiels dont la *différence* lui sert précisément de mesure. Désignons par V_0 le potentiel du point A, par V_1 celui du point D et supposons $V_0 > V_1$; un des caractères essentiels de la *f. e. m.* est que la différence $V_1 - V_0$ est indépendante de la valeur absolue de V_0. Il résultera de là que tous les points de la région du circuit représentée par ABK seront au potentiel V_0 tandis que tous ceux de la région DCK seront au potentiel V_1, et que nous aurons, en désignant par E la *f. e. m.* développée dans le côté AD

$$E = V_0 - V_1.$$

Digitized by Google

Remarquons en passant qu'il nous est impossible de calculer le potentiel d'un point donné de la région AD à moins que nous ne connaissions la *f. e. m.* développée par chacune des portions de AD. Tout ce que nous savons actuellement, c'est que la différence des potentiels des extrémités A et D de la région AD est maintenue à la valeur $V_0 - V_1$ en vertu de la cause à laquelle nous avons donné le nom de force électro-motrice.

Fermons maintenant le circuit en mettant en contact les deux portions BK, CK qui étaient séparées au point K. Si la *d. d. p.* (différence de potentiel) était maintenue constante entre A et D malgré la présence du courant qui prend naissance, ce courant aurait pour valeur

$$I = \frac{V_0 - V_1}{r'},$$

r' désignant la résistance de la portion ABKCD.

300. — L'intensité I du courant étant la même dans tous les points du circuit (sans quoi il y aurait accumulation d'électricité dans certaines régions jusqu'à ce que l'état permanent du courant fût établi), a dans la portion DA la même valeur que dans la portion ABKCD, et si la résistance de DA était nulle, l'expression de I que nous venons de trouver serait exacte. Mais en général il n'en est pas ainsi et la résistance de DA a pour résultat de modifier, non seulement la valeur de I, mais encore la *d. d. p.* $V_0 - V_1$, malgré la propriété que nous avons attribuée à la *f. e. m.* de maintenir constante cette *d. d. p.* Nous allons expliquer cette contradiction apparente.

Dans la portion ABKCD, le courant se propage dans le sens indiqué par les flèches, c'est-à-dire qu'il va du point A où le potentiel est le plus élevé vers le point D où le potentiel est le plus faible et ce résultat est conforme à tout ce que nous avons dit jusqu'à présent concernant la propagation de l'électricité. Mais dans la région DA, il n'en est plus de même; le courant, pour être *fermé*, doit aller du point D au point A, c'est-à-dire dans un sens contraire à celui qu'il devrait avoir s'il ne dépendait que de la *d. d. p.* des points A et D et il

Digitized by Google

est évident que cela est dû à la présence d'une *f. e. m.* dans la portion DA. Pour nous faire une idée nette de ce qui se passe alors, supposons que le circuit étant rompu en K, une masse électrique égale à l'unité se déplace de D en A; et cherchons à évaluer le travail qu'elle développera pendant ce trajet. Elle est soumise à deux actions contraires : la *f. e. m.* qui, par définition, la sollicite dans le sens DA, et la *d. d. p.* qui la sollicite dans le sens AD puisque le potentiel V_0 est plus grand que V_1 (Nous supposons bien entendu que les quantités d'électricité accumulées en A et en D sont de même signe que la masse-unité et exercent par conséquent sur elle une force répulsive). Si la *f. e. m.* est supérieure à la *d. d. p.*, la masse-unité quittera le point D pour se rendre au point A; la quantité d'électricité diminuera donc d'une unité en D et augmentera d'autant en A, il en résultera par suite un accroissement du potentiel de A, une diminution égale du potentiel de D, et finalement une augmentation de la *d. d. p.* des points A et D. Si, malgré cette augmentation, la *d. d. p.* entre A et D est encore inférieure à la *f. e. m.*, une nouvelle masse-unité quittera D pour se rendre en A et ainsi de suite jusqu'à ce que la *d. d. p.* devienne égale à la *f. e. m.* A ce moment il y aura équilibre entre les deux actions, c'est-à-dire que le travail accompli par une masse-unité se rendant de l'un à l'autre des points sera nul. *Nous sommes obligés de conclure de là que le travail développé sur la masse-unité par une f. e. m., a précisément pour valeur la d. d. p. qui est produite par l'action de cette f. e. m. dans un circuit ouvert.* La *f. e. m.* n'est donc pas une force, comme son nom pourrait le faire croire, mais un travail dont la définition est identique à celle du travail produit par une *d. d. p.*

301. — Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour calculer la valeur du courant dans la portion DA lorsque le circuit ABCDA est fermé. Les développements dans lesquels nous venons d'entrer sur le mode d'action de la *f. e. m.* nous montrent qu'elle agit absolument comme le ferait une *d. d. p.* La seule différence qui existe entre elles étant que l'une est la cause de l'autre. La masse-unité se rendant de D en A développe donc un travail égal

Digitized by Google

à la différence des travaux dûs à la *f. e. m.* E et à la *d. d. p.* $(V_0 - V_1)_f$ [1] qui existe entre les points A et D lorsque le circuit est fermé. C'est-à-dire que tout se passe comme si, dans cette portion de circuit elle était soumise à une *d. d. p.* égale à $E - (V_0 - V_1)_f$ tandis que dans la portion ABCD, elle est soumise à la seule action de la *d. d. p.* $(V_0 - V_1)_f$. L'intensité du courant dans la portion DA a donc pour expression

$$I = \frac{E - (V_0 - V_1)_f}{r},$$

tandis que dans la portion ABCD elle est donnée par l'expression

$$I = \frac{(V_0 - V_1)_f}{r'}.$$

L'intensité du courant étant la même dans tous les points du circuit comme nous l'avons déjà dit plusieurs fois, ces deux expressions doivent être égales. Donc

$$I = \frac{(V_0 - V_1)_f}{r'} = \frac{E - (V_0 - V_1)_f}{r},$$

d'où en ajoutant chacun à chacun les numérateurs et les dénominateurs

$$I = \frac{E}{r + r'}.$$

302. — Équilibre d'une force électro-motrice et d'une différence de potentiel. — Une expérience très simple permet de

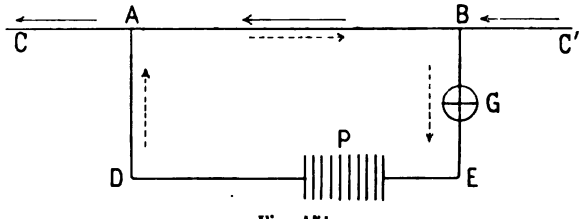

Fig. 151

mettre en évidence l'équivalence d'une *f. e. m.* et d'une *d. d. p.* Soit CC' (fig. 151) un conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité I. Aux deux points A et B de ce conducteur fixons les

(1) $(V_0 - V_1)_f$ désignant la valeur que prend $V_0 - V_1$ lorsque le circuit est fermé.

Digitized by Google

extrémités d'un circuit ADPEGB dans lequel est intercalée une *pile* électrique P, douée de force électro-motrice, et un *galvanomètre* G, destiné à accuser l'existence d'un courant dans le circuit ADPEGB. Si le conducteur CC′ n'était mis en communication avec aucune source d'électricité autre que la pile P, la portion AB de ce conducteur serait parcourue par un courant dû à la *f. e. m.* de cette pile et qui est représenté par les flèches ponctuées. Si au contraire le conducteur CC′ est mis en communication avec une source extérieure capable de déterminer dans la portion AB un courant représenté par les flèches en trait plein, et que ce courant soit de sens contraire à celui dû à la pile P, on ne voit pas immédiatement quel va être le sens du courant qui se produira réellement. Sans chercher à résoudre ce problème qui sera traité plus loin, nous nous bornerons ici à déterminer quelles sont les conditions à remplir pour que la pile P ne produise en réalité aucun courant, de façon que le courant qui existe dans la portion AB soit entièrement dû à la source qui alimente le conducteur CC′.

Lorsque ce résultat est atteint, l'intensité I du courant est donnée par l'équation

$$I = \frac{V_0 - V_1}{r},$$

V_0 et V_1 désignant la valeur du potentiel en B et en A et r la résistance de la portion AB. On tire de là

$$V_0 - V_1 = rI.$$

Telle est la valeur de la *d. d. p* qui fait équilibre à la *f. e. m.* de la pile P, laquelle n'est parcourue par aucun courant bien que son circuit soit fermé métalliquement.

§ 4. — ANALOGIE ENTRE LES LOIS DU COURANT ÉLECTRIQUE ET CELLES DE L'HYDRO-DYNAMIQUE.

303. — Il y a entre les lois de l'écoulement des liquides dans les tuyaux et celles du courant électrique des analogies qu'il est utile de connaître ; mais il y a aussi des différences qui ne permettent pas

Digitized by Google

d'admettre que le courant électrique soit assimilable à un courant liquide. Nous allons énoncer rapidement les unes et les autres.

Dans un circuit électrique composé d'un seul conducteur, l'intensité du courant est la même en tous les points du circuit ; de même dans un tuyau parcouru par un courant liquide, le débit (qui est l'équivalent de l'intensité du courant) est le même dans tous les points du tuyau et ceci est vrai même pour les fluides compressibles comme les gaz, car on dit que le débit est arrivé à son régime permanent lorsque la *masse* du fluide qui *entre* par l'une des extrémités du tuyau dans l'unité de temps est égale à la *masse* qui *sort* par l'autre extrémité. Toutefois dans le cas des fluides compressibles, l'analogie n'existe que lorsque le régime est permanent.

Le mouvement d'un liquide dans un tuyau donne lieu à une résistance proportionnelle à la longueur du tuyau et cette résistance a pour conséquence une diminution (ou perte de charge) correspondante de la pression initiale de l'eau. De même, le passage du courant dans un conducteur entraîne une diminution du potentiel initial proportionnelle à la longueur.

Le travail accompli pendant un trajet déterminé par un volume de liquide faisant partie du courant qui traverse un tuyau, a pour valeur le produit de ce volume par la différence des pressions du liquide entre les deux extrémités du trajet. De même le travail accompli par une quantité d'électricité qui se propage d'un point à un autre d'un conducteur, a pour mesure le produit de cette quantité par la différence des potentiels des deux points.

Enfin la force électromotrice qui se révèle à nous par la production d'une différence de potentiel entre deux points différents d'un corps conducteur, bien qu'il ne soit pas le siège d'un courant, peut être facilement représentée lorsqu'il s'agit d'un liquide.

Supposons en effet une masse liquide remplissant complètement un cylindre capable de tourner autour de son axe auquel sont soudées des cloisons longitudinales qui forcent le liquide à participer, sans glissement possible, au mouvement de rotation. Imprimons à ce cylindre une vitesse de rotation de n tours par seconde. Désignons par m la masse de l'unité de volume du liquide et par r le rayon intérieur du

Digitized by Google

cylindre; il est facile de démontrer que si une petite quantité du liquide entraîné dans la rotation était d'abord située au centre du cylindre et qu'elle fût ensuite amenée jusqu'à la circonférence elle développerait pendant ce trajet un travail égal à

$$2m\pi^2n^2r^2$$

par unité de volume.

En considérant l'unité de volume du liquide comme représentant la masse-unité électrique, ce travail, développé lorsqu'elle passe du centre à la circonférence, représenterait la différence de potentiel de ces deux positions et par conséquent la force électro-motrice qui lui est équivalente et qu'on pourrait appeler ici force hydro-motrice.

304. — Si pour continuer notre comparaison jusqu'au bout, nous immobilisons le cylindre en rendant les cloisons mobiles et si nous perçons au centre et à la circonférence des ouvertures auxquelles aboutissent les deux extrémités d'un tuyau, nous constituerons ainsi une véritable *pompe centrifuge* dont la rotation entretiendra dans le tuyau une circulation indéfinie du liquide qui entrera dans l'appareil par le centre et en sortira par la circonférence. Le mouvement du liquide dans l'intérieur de l'appareil sera donc, grâce à la *force hydro-motrice*, dirigé en sens contraire de celui qu'il prendrait sous la seule influence de la différence des pressions du liquide au centre et à la circonférence. Cette dernière est en effet plus élevée que l'autre d'une quantité qui, exprimée en dynes, par centimètres carrés aurait une valeur égale à la force hydro-motrice

$$2m\pi^2n^2r^2$$

diminuée des pertes de pression causées par les frottements du liquide à l'intérieur de la pompe centrifuge.

La vitesse du courant liquide déterminé dans le tuyau par la différence des pressions qui existent à la circonférence et au centre de la pompe centrifuge, augmentera naturellement avec cette différence. Mais elle ne lui est pas proportionnelle. L'expérience montre en effet que le débit d'un tuyau et par conséquent la vitesse du liquide est proportionnelle à la racine carrée de la différence des pressions à l'origine et à la fin du tuyau.

Digitized by Google

C'est ici qu'apparaissent les différences qui existent entre les lois de l'écoulement d'un liquide dans un tuyau et celle du courant permanent dans un fil métallique ; car la formule

$$I = \frac{V_0 - V_1}{R}$$

où

$$V_0 - V_1 = RI$$

nous montre que le *débit électrique* est proportionnel à la différence de potentiel tandis que le *débit hydraulique* est proportionnel à la racine carrée de la *différence des pressions hydrostatiques*.

Enfin on trouverait également que la *résistance* d'un tuyau à l'écoulement d'un liquide, exprimée en fonction du diamètre, conduit à une formule toute différente de celle qui fait connaître la résistance d'un conducteur.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet ; nous avons voulu montrer seulement qu'il y a de profondes dissemblances entre ces deux genres de phénomènes physiques malgré l'analogie des termes employés journellement par beaucoup d'auteurs qui disent qu'une machine *débite*, par exemple, cinquante ampères sous la *pression* de cent volts et qui remplacent également l'expression de différence de potentiel entre les deux points d'un même circuit par celle de perte de charge.

305. — Si le courant électrique était réellement produit par le mouvement de translation d'un chapelet de molécules électrisées glissant le long d'un conducteur, il est facile de démontrer que pour qu'un pareil courant fût régi par les lois d'Ohm, il faudrait que chaque molécule éprouvât de la part du conducteur une résistance proportionnelle à la quantité d'électricité qu'elle contiendrait et à sa vitesse de translation.

Nous avons trouvé un dispositif qui permet de réaliser cette condition avec un liquide, c'est-à-dire de faire naître sur les organes qui servent à mettre le liquide en mouvement une résistance proportionnelle à la vitesse imprimée au liquide ou plutôt proportionnelle *à la masse* du liquide écoulé dans l'unité de temps ; mais la

Digitized by Google

description de ce dispositif, très simple d'ailleurs, sortirait trop du cadre de cet ouvrage.

Nous terminerons ces considérations sur la comparaison entre les lois d'Ohm et d'autres phénomènes, en faisant remarquer que l'on pourrait parfaitement rendre compte de ces lois en disant que le courant électrique donne naissance à une *f. e. m.* inverse proportionnelle à l'intensité du courant par unité de section du conducteur (c'est ce qu'on appelle la densité du courant), proportionnelle à la longueur et qui toutes choses égales d'ailleurs, est variable avec la nature du conducteur. L'équation qui donne l'intensité lorsque le régime permanent est établi, exprimerait alors simplement que cet état permanent existe lorsque la *f. e. m.* qui sert à produire le courant est égale à la somme de toutes les *f. e. m.* négatives engendrées par le passage du courant dans le conducteur. On supprimerait ainsi l'expression « *résistance* » du vocabulaire électrique sans avoir besoin de la remplacer par aucune autre. Nous avons vu en effet (290) que la résistance d'un conducteur a pour expression

$$R = \rho \frac{l}{s}.$$

L'intensité du courant produit dans ce conducteur par une *d. d. p.* ε est d'autre part

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon s}{\rho l},$$

d'où

$$\varepsilon = \rho l \frac{I}{s}$$

Cette dernière équation donne, lorsqu'on y fait $l = 1$, $\frac{I}{s} = 1$;

$$\varepsilon = \rho.$$

On peut l'interpréter, ainsi que nous venons de le dire, en considérant la *d. d. p.* ε comme faisant équilibre à la somme des *f. e .m.* inverses développées dans le fil par le passage du courant et qui seraient proportionnelles à $\frac{1}{s}$ et à l. Cela ne changerait rien d'ailleurs aux équations dans lesquelles intervient la loi d'Ohm.

Digitized by Google

§ 5. — DIMENSIONS DE LA F. E. M., DE LA D. D. P. ET DE LA RÉSISTANCE DANS LE SYSTÈME D'UNITÉS C. G. S. ÉLECTROSTATIQUES.

306. — Nous avons déjà fait connaître les dimensions de la *d. d. p.* dans le système électro-statique, c'est-à-dire l'expression analytique la plus simple possible et débarrassée de tout coefficient numérique qui représenterait une *d. d. p.* en fonction des unités de longueur, L, de masse, M, et le temps, T. La *f. e. m.*, étant représentée par la *d. d. p.* à laquelle elle fait équilibre, a la même expression analytique que cette dernière ; elle est par conséquent égale au quotient d'un travail mécanique par une quantité d'électricité. Or un travail mécanique a pour expression le produit d'une force F par une longueur L.

Mais une force étant représentée par le symbole $\frac{ML}{T^2}$ il en résulte que le travail a pour expression $\frac{ML^2}{T^2}$.

D'autre part, la loi de Coulomb qui est exprimée symboliquement par la relation

$$F = \frac{Q^2}{L^2},$$

donne

$$\frac{FL}{Q} = \frac{Q}{L} = \sqrt{F},$$

ou

$$\frac{FL}{Q} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Le premier membre représente le quotient d'un travail mécanique FL par la quantité Q d'électricité qui a servi à le produire, c'est-à-dire le potentiel d'un corps. On a donc :

Potentiel (V) *ou force électro-motrice exprimée en unités électro-statiques :*

$$V = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Digitized by Google

La loi de Coulomb donne

$$Q = L\sqrt{F} = L\sqrt{\frac{ML}{T^2}}.$$

Donc :

Quantité (Q) *d'électricité en unités électro-statiques :*

$$Q = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}.$$

L'intensité (I) d'un courant est représentée par le quotient $\frac{Q}{T}$. On a par conséquent :

Intensité (I) *d'un courant en unités électro-statiques :*

$$I = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}.$$

Enfin la résistance étant en vertu de la loi d'Ohm $\left(I = \frac{V}{R}\right)$ égale à $\frac{V}{I}$ on a

$$R = \frac{V}{I} = \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}} = \frac{T}{L}.$$

Donc

Résistance (R) *d'un conducteur en unités électro-statiques :*

$$R = \frac{T}{L}.$$

On voit que cette dernière expression est précisément l'inverse du rapport $\frac{L}{T}$ qui représente une vitesse.

307. — Représentation physique d'une résistance au moyen de phénomènes électro-statiques. — Supposons que l'on réunisse les deux armatures d'un condensateur de capacité C par un conducteur très résistant de manière que la décharge ne soit pas instantanée. A mesure que la quantité d'électricité emmagasinée dans les armatures diminuera, la différence de potentiel V de ces armatures, devant toujours satisfaire à l'équation $Q = CV$, diminuera également à moins que l'on ne fasse diminuer C en même temps que Q

Digitized by Google

de manière à rendre constant le quotient

$$\frac{Q}{C} = V.$$

Or l'équation $Q = CV$ donne, en différentiant par rapport à C

$$dQ = V dC \qquad \text{ou} \qquad \frac{dQ}{dt} = V \frac{dC}{dt}.$$

Mais $\frac{dQ}{dt}$ est précisément l'intensité I du courant dans le conducteur qui réunit les deux armatures ; on a donc

$$I = V \frac{dC}{dt}.$$

Mais en vertu de la loi d'Ohm on a, en désignant par R la résistante du conducteur qui réunit les deux armatures

$$I = \frac{V}{R}.$$

En égalant ces deux valeurs de I, on trouve

$$R = \frac{1}{\left(\frac{dC}{dt}\right)}.$$

Mais $\frac{dC}{dt}$ représente la vitesse avec laquelle la capacité C décroît dans l'unité de temps. Or si le condensateur employé est une sphère élastique de rayon variable chargée d'électricité et communiquant avec le sol (qui représente alors la seconde armature) au moyen du conducteur de résistance R, la capacité de cette sphère, étant comme nous l'avons vu, égale à son rayon que nous désignerons par x, on a

$$C = x, \qquad \frac{dC}{dt} = \frac{dx}{dt},$$

d'où

$$R = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Mais $\frac{dx}{dt}$ est la vitesse avec laquelle le rayon de la sphère décroît dans l'unité de temps. Donc la résistance R du conducteur est représentée physiquement par l'inverse de la vitesse avec laquelle il faut

Digitized by Google

faire décroître le rayon de la sphère pour que le potentiel V produise dans le conducteur un courant égal à I.

L'idée de cette représentation physique du coefficient algébrique auquel on a donné le nom de résistance, est due à William Thomson. Mais il ne faudrait nullement croire qu'elle nous donne aucune notion nouvelle sur la nature intime de la résistance d'un conducteur ; car nous verrons, en traitant de l'Induction, que l'on peut également représenter physiquement une résistance par une vitesse, tandis qu'ici elle est représentée par l'inverse d'une vitesse.

308. — Durée de la décharge d'un condensateur dont les armatures sont réunies par un conducteur de résistance connue. — Nous pouvons maintenant, grâce à la connaissance des lois d'Ohm, résoudre un problème intéressant auquel nous amène naturellement la question traitée dans le numéro précédent. Si on réunit les deux armatures d'un condensateur de capacité invariable C par un conducteur de résistance R, la décharge ne peut pas être instantanée parce que cela exigerait que le courant $\frac{dQ}{dt}$ eût une intensité infinie ce qui aurait pour conséquence, en vertu de la relation $I = \frac{V}{R}$, une valeur également infinie de la *d. d. p.* V de ses deux armatures.

L'équation fondamentale $Q = CV$ étant différentiée par rapport à Q et à V donne

$$dQ = C dV,$$

ou en divisant par dt

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dv}{dt}.$$

Mais $\frac{dQ}{dt}$ est précisément l'expression de l'intensité du courant à chaque instant, on a donc

$$I = C \frac{dV}{dt}.$$

Mais la loi d'Ohm donne

$$I = \frac{V}{R}.$$

Donc

$$\frac{V}{R} = \frac{C dV}{dt},$$

Digitized by Google

d'où

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{CR}\,dt$$

d'où, en intégrant

$$t = CR \log \frac{V_0}{V},$$

équation dans laquelle V_0 représente la valeur initiale de la *d. d. p.* V au moment où on met les deux armatures en communication, et t le temps écoulé depuis ce moment jusqu'à celui où la *d. d. p.* atteint la valeur V. On voit que si on fait $V = 0$, c'est-à-dire si on cherche au bout de combien de temps les deux armatures sont ramenées au même potentiel, on trouve $t = \infty$; c'est-à-dire que, théoriquement, un condensateur n'est jamais complètement déchargé tandis que, pratiquement, il paraît l'être complètement dans un temps très court à moins que le conducteur n'ait une résistance extrêmement grande. Mais si au lieu de chercher au bout de combien de temps le condensateur est complètement déchargé, nous cherchons le temps nécessaire pour que la *d. d. p.* atteigne une fraction déterminée k de sa valeur initiale, le résultat obtenu est tout différent. Posons en effet

$$\frac{V}{V_0} = k,$$

nous aurons

$$t = CR \log \frac{1}{k},$$

et nous voyons immédiatement que pour ramener la *d. d. p.* à une même fraction de sa valeur initiale, la réunion des armatures par le conducteur doit avoir lieu pendant un temps proportionnel au produit CR.

Exemple numérique. — Pour montrer combien, en réalité, la décharge est rapide, prenons $k = 0{,}001$, c'est-à-dire cherchons le temps nécessaire pour que la *d. d. p.* finale (et par conséquent la charge Q) soit ramenée à n'avoir plus qu'une valeur égale à la millième partie de sa valeur initiale. Nous trouvons

$$t = CR \log \frac{1}{0{,}001}.$$

Digitized by Google

Le logarithme népérien de $\frac{1}{0,001}$ étant égal à 6,908 il vient

$$t = 6,908 \text{ CR.}$$

Mais pour appliquer cette formule il faut exprimer C et R en unités électro-statiques. Or nous avons vu que l'unité usuelle de capacité, le microfarad, vaut 900 000 unités électro-statiques et que l'unité de résistance usuelle, l'Ohm vaut (291) $\frac{1}{900\,000\,000\,000}$ d'unité électro-statique, donc, si l'on exprime C et R en unités usuelles, on aura

$$t = 6,908 \times 900000 \times \frac{1}{900\,000\,000\,000} \text{ CR,}$$

ou enfin

$$t = \frac{6,908}{1\,000\,000} \text{ CR.}$$

Si on prend par exemple C = 1 microfarad, R = 1 Ohm, on trouvera pour t une valeur plus petite que $\frac{1}{140000}$ de seconde.

Ce résultat montre que nous avions raison de dire que pratiquement parlant, la décharge d'un condensateur peut être considérée comme instantanée. Toutefois il convient de dire dès à présent, que la formule à laquelle nous sommes arrivés n'est exacte qu'à la condition expresse que le circuit ne contienne pas de portions enroulées sur elles-mêmes ou en zig-zag ; il doit être réduit à deux fils rectilignes aussi éloignés que possible l'un de l'autre ou, mieux encore, à une circonférence unique ayant une solution de continuité qui correspond à la place occupée par le condensateur. Enfin le diamètre du conducteur doit également être très faible.

Nous verrons en traitant de l'induction la raison d'être de ces restrictions.

§ 6. — RÉSISTANCE DES CONDUCTEURS COMPLEXES.

309. — Résistance d'une série de conducteurs placés bout à bout. — Lorsque plusieurs conducteurs sont placés bout à bout, on dit qu'ils sont placés en *série* ou en *tension*. La résistance d'un tel ensemble de conducteurs est très facile à déterminer. Soit en effet, r_1, r_2, ..., r_n la résistance de chacun de ces conducteurs, et V_0, V_1, ..., V_n les potentiels successifs de leurs extrémités qui, placées en contact, assurent la continuité du circuit. L'intensité du courant sera représentée dans chacun d'eux par les formules

Digitized by Google

suivantes

$$i_1 = \frac{V_0 - V_1}{r_1}, \qquad i_2 = \frac{V_1 - V_2}{r_2}, \qquad \ldots, \qquad i_n = \frac{V_{n-1} - V_n}{r_n}.$$

Mais l'intensité du courant étant la même dans tous les points du circuit, toutes ces fractions sont égales entre elles et par conséquent, en vertu d'un théorème d'algèbre élémentaire, égales au quotient de la somme des numérateurs de chacune d'elles par la somme des dénominateurs. On a donc

$$i_1 = i_2 = \cdots = i_n = \frac{(V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \cdots + (V_{n-1} - V_n)}{r_1 + r_2 + \cdots + r_n} = \frac{V_0 - V_n}{\Sigma r}.$$

Σr désignant la somme des résistances $r_1 + r_2 + \ldots + r_n$.

D'autre part, en désignant par R la résistance d'un conducteur dont les extrémités maintenues aux potentiels V_1 et V_n livreraient passage à un courant d'intensité $I = i_1 = i_2 = i_3$, on aurait

$$I = \frac{V_0 - V_n}{R},$$

équation qui, comparée à la précédente, donne

$$R = \Sigma r.$$

La résistance d'un ensemble de conducteurs placés les uns à la suite des autres, c'est-à-dire groupés en tension ou en série, est donc égale à la somme des résistances de chacun d'eux.

L'expression « en tension » vient, comme on le voit, de ce que la *d. d. p.* des extrémités de cet ensemble de conducteurs est égale à la somme des *d. d. p.* des extrémités de chacun d'eux.

310. — Résistance d'une série de conducteurs placés en dérivation. — Lorsque plusieurs conducteurs partent d'un point A pour aboutir à un point B (fig. 152), on dit qu'ils sont groupés en dérivation ou en quantité ou en parallèle.

Soit $r_1 r_2 \ldots r_n$ la résistance de chacun d'eux et soit V_0 et V_1 les potentiels des points A et B ; l'intensité du courant dans chaque fil donne lieu aux équations suivantes

Digitized by Google

$$i_1 = \frac{V_0 - V_1}{r_1}, \qquad i_2 = \frac{V_0 - V_1}{r_2}, \qquad \ldots, \qquad i_n = \frac{V_0 - V_1}{r_n}.$$

Le courant I total égal à la somme des courants partiels $i_1, i_2, \ldots, i_n$ a donc pour valeur

$$I = i_1 + i_2 + \cdots + i_n = (V_0 - V_1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}\right).$$

d'où on tire

$$\frac{V_0 - V_1}{I} = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}} = \frac{1}{\sum \frac{1}{r}}.$$

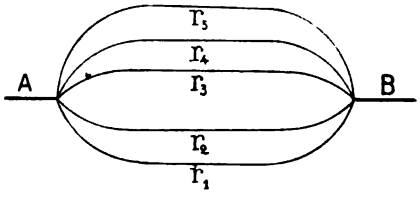

Fig. 152

Mais en appelant R la résistance d'un conducteur unique qui, joignant directement A à B serait parcouru par le même courant I, on aurait

$$V_0 - V_1 = RI,$$

d'où

$$R = \frac{V_0 - V_1}{I} = \frac{1}{\sum \frac{1}{r}}.$$

Ainsi la résistance de cet ensemble est égale à l'inverse de la somme des inverses des résistances individuelles des conducteurs intercalés entre A et B.

Comme cas particulier nous signalerons celui où tous les conducteurs sont égaux ; on a alors, en désignant par n leur nombre

$$R = \frac{1}{\left(\frac{n}{r}\right)} = \frac{r}{n}.$$

311. — Résistance apparente d'un conducteur qui contient une f. e. m. — Soit AB (fig. 153) un conducteur de résistance R

Digitized by Google

faisant partie d'un circuit parcouru par un courant I et contenant

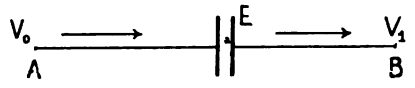

Fig. 153

une *f. e. m.* E_1 ; on demande quelle devrait être la résistance x d'un conducteur inerte (c'est-à-dire ne contenant pas de *f. e. m.*) aboutissant aux mêmes points A et B pour que, substitué au conducteur AB et parcouru par le même courant, il n'altère pas la valeur de la *d. d. p.* $(V_0 - V_1)$ des points A et B.

L'intensité du courant dans le conducteur de résistance R a pour expression

$$I = \frac{E_1 + (V_0 - V_1)}{R}.$$

De même dans le conducteur direct de résistance x, on aurait

$$I = \frac{V_0 - V_1}{x}.$$

Donc

$$\frac{E_1 + (V_0 - V_1)}{R} = \frac{V_0 - V_1}{x},$$

d'où

$$x = \frac{V_0 - V_1}{E_1 + (V_0 - V_1)} R.$$

Si on suppose que E_1 soit de signe contraire à $(V_0 - V_1)$, c'est-à-dire tende à produire un courant de signe contraire à celui qui existe réellement, on aura

$$x = \frac{V_0 - V_1}{(V_0 - V_1) - E_1} R.$$

On voit que si la *f. e. m.* négative E_1 était égale à $V_0 - V_1$, la résistance apparente serait infinie. C'est ce qui a lieu dans l'expérience analysée plus haut (302) où une *d. d. p.* équilibre complètement une *f. e. m.* de sorte qu'aucun courant ne traverse la portion de circuit qui contient cette dernière.

Digitized by Google

312. — Lois de Kirchhoff. — Soit ABCD un polygone formé d'un nombre n de conducteurs (fig. 154) AB, BC, CD, DA aux sommets duquel aboutissent d'autres conducteurs parcourus par des courants. Nous supposerons que les côtés AB, ..., DA contiennent des *f. e. m.*

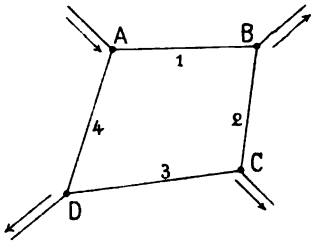

Fig. 154

Numérotons les côtés dans le sens des aiguilles d'une montre et considérons comme positifs les courants qui les parcourent dans ce sens et comme négatifs ceux qui les parcourent en sens contraire. Désignons par I_1, I_2, ..., I_n les courants qui traversent les conducteurs 1, 2, ... n ; par E_1, E_2, ..., E_n les *f. e. m.* qu'ils contiennent et par R_1, R_2, ... R_n leur résistance. Désignons enfin par V_1 le potentiel absolu (nous appelons ainsi la différence entre le potentiel considéré et celui de la terre) de A ; V_2 celui de B ; V_3 celui de C ... ; V_n celui de l'avant-dernier sommet. L'intensité du courant dans le premier côté sera donnée par l'équation

$$I_1 = \frac{E_1 + (V_1 - V_2)}{R_1},$$

d'où

$$R_1 I_1 = E_1 + V_1 - V_2.$$

On aurait de même pour les autres côtés

$$R_2 I_2 = E_2 + V_2 - V_3,$$
$$R_3 I_3 = E_3 + V_3 - V_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_n I_n = E_n + V_n - V_1.$$

En ajoutant ces équations membre à membre il vient

$$\Sigma RI = \Sigma E$$

Digitized by Google

ou

$$\Sigma(E - RI) = 0,$$

équation qui constitue l'une des lois de Kirchhoff.

L'autre loi qui est presque évidente consiste en ce que :

Lorsque plusieurs conducteurs parcourus par des courants aboutissent au même point, la somme algébrique des intensités des courants qui aboutissent à ce point est nulle : parce que, s'il en était autrement, il y aurait en ce point une accumulation d'électricité proportionnelle au temps. C'est ainsi que dans un réseau de tuyaux parcourus par un liquide, si plusieurs tuyaux aboutissent au même point, la quantité de liquide qui arrive en ce point dans l'unité de temps est égale à celle qui s'en éloigne et que par suite la somme algébrique des débits des tuyaux est constamment nulle. Cette seconde équation s'écrit

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n = 0$$

ou

$$\Sigma I = 0.$$

313. — Distribution des courants électriques dans un réseau complexe. — Les lois de Kirchhoff servent à calculer l'intensité des courants qui traversent chacune des branches d'un réseau composé de conducteurs en nombre quelconque (fig. 155)

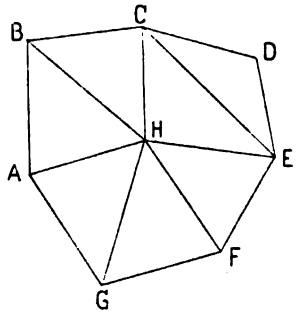

Fig. 155

contenant des *f. e. m.* et formant une série de triangles juxtaposés. Mais les calculs de ce genre sont en général très longs lorsque le nombre des branches est un peu considérable. On démontre en effet

Digitized by Google

que si on désigne par n le nombre des sommets A, B, C, ..., H auxquels aboutissent des conducteurs, et par N le nombre des conducteurs du réseau, le nombre des équations simultanées du premier degré de la forme $\Sigma(E - RI) = 0$ auquel on sera conduit après avoir supprimé celles qui font double emploi, ne peut être inférieur à $(N - n + 1)$. Ces $N - n + 1$ équations, ajoutées aux $n - 1$ équations de la forme $\Sigma I = 0$ qui se rapportent aux n sommets, donnent en définitive N équations du premier degré qui permettent de trouver l'intensité des courants afférents à chacune des N branches du réseau. Nous donnerons comme exemple de la complication des résultats auxquels on arrive ainsi, l'équation qui fait connaître l'intensité du courant dans certaines branches d'un réseau auquel on a donné le nom de *Pont de Wheatstone*.

Ce dispositif, inventé par Christie en 1833 et retrouvé en 1843 par Wheatstone, consiste en un réseau de six conducteurs (fig. 156) réunissant deux à deux les quatre sommets d'un quadrilatère ABCD. Dans l'une des diagonales telle que AC est intercalée une pile (non représentée sur la figure) servant à produire une *f. e. m.* On demande de calculer l'intensité du courant qui traverse la seconde diagonale BD, connaissant la résistance des six conducteurs ainsi que la *f. e. m.*

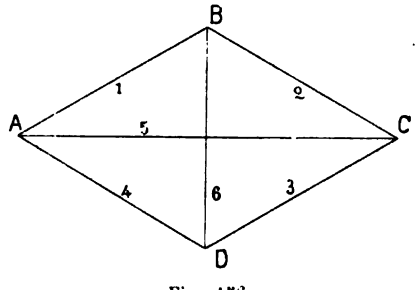

Fig. 156

de la pile intercalée en AC et qui a elle-même une résistance propre comptée comme faisant partie de la résistance AC. Désignons par $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$, les résistances des côtés qui portent sur la figure les numéros correspondants ; par $i_1, i_2, \ldots, i_6$ les courants correspondants. La loi de Kirchhoff représentée par l'équation $\Sigma i = 0$ appli-

Digitized by Google

quée à chacun des sommets A, B, C, D donne

$$\begin{aligned} i_1 + i_4 + i_5 &= 0, \\ i_1 + i_2 + i_6 &= 0, \\ i_2 + i_3 + i_5 &= 0, \\ i_3 + i_4 + i_6 &= 0. \end{aligned}$$

La loi représentée par l'équation $\Sigma(E - Ri) = 0$ donne également quatre équations. Chacun de ces groupes d'équations peut se réduire à trois, de sorte que l'on a six équations pour déterminer les six courants $i_1, i_2, \ldots, i_6$. On trouve ainsi pour les valeurs du courant i_6 qui passe dans la diagonale où ne se trouve pas de *f. e. m.*

$$i_6 = \frac{E(r_1 r_3 - r_2 r_4)}{r_5 r_6(r_1+r_2+r_3+r_4) + r_6(r_1+r_2)(r_3+r_4) + r_5(r_2+r_3)(r_1+r_4) + r_2 r_3(r_1+r_4) + r_1 r_4(r_2+r_3)}.$$

Cette équation, qui nous servira par la suite, montre la complication des expressions auxquelles on arriverait si on voulait trouver la valeur algébrique de l'intensité du courant dans les branches d'un réseau ayant un nombre de branches même peu considérable.

314. — Expression simplifiée de la valeur du courant qui traverse la diagonale du Pont de Wheatstone. — L'équation qui donne la valeur du courant i_6 qui traverse la diagonale BD du réseau de conducteurs connu sous le nom de *Pont de Wheatstone*, est très compliquée et d'un usage très restreint; elle sert surtout à chercher sous quelles conditions le courant i_6 est nul. Il suffit pour cela que le numérateur de l'expression ci-dessus soit égal à zéro, c'est-à-dire que l'on ait

$$r_1 r_3 = r_2 r_4.$$

Ainsi, pour qu'aucun courant ne traverse la diagonale qui ne contient pas de *f. e. m.*, il faut que les produits des résistances de deux côtés opposés du quadrilatère soient égaux.

Ce théorème étant très important puisque c'est lui qui sert de base à l'emploi du Pont pour la mesure des résistances, nous pensons qu'il est utile d'en donner une démonstration directe plus simple que celle qui est basée sur les lois de Kirchhoff.

Soit AB, A'B' (fig. 157) deux conducteurs de même substance et de

Digitized by Google

même section, mais de longueurs différentes et dont les extrémités A et A′ d'une part, B et B′ d'autre part, sont réunies par deux conducteurs très gros AA′, BB′ dont la résistance peut être considérée

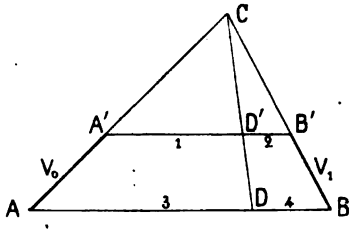

Fig. 157

comme négligeable. Ces conducteurs sont maintenus respectivement au moyen d'une pile aux potentiels V_0 et V_1, de sorte que le potentiel des points A et A′ est égal à V_0, et le potentiel des points B et B′ à V_1.

Ce système de conducteurs forme un trapèze A′B′BA dont nous pouvons prolonger par la pensée les côtés AA′BB′ jusqu'à leur intersection C. Par ce point C menons une droite quelconque CD′D, nous allons démontrer que les points d'intersection D′ et D de cette droite avec les côtés A′B′ et AB sont au même potentiel $V = V'$.

Supposons en effet le potentiel $V_0 > V_1$, le courant qui traverse AB a pour valeur

$$I = \frac{V_0 - V_1}{R},$$

R désignant la résistance de AB.

Mais la résistance de AB est égale au produit de la résistance r de l'unité de longueur de ce conducteur par sa longueur $\overline{AB}$. De même la résistance de A′B′ aura pour mesure le produit de r par la longueur $\overline{A'B'}$. Donc les intensités des deux courants peuvent s'écrire

$$I = \frac{V_0 - V_1}{r.\overline{AB}}, \qquad I' = \frac{V_0 - V_1}{r.\overline{A'B'}}.$$

Cherchons maintenant la valeur du potentiel V du point D. L'in-

Digitized by Google

tensité du courant I va nous permettre de trouver cette valeur car la *d. d. p.* $V_0 - V$ entre A et D doit satisfaire à l'équation

$$V_0 - V = (\text{Résistance } \overline{AD}) \times I.$$

Mais

$$\text{Résistance } \overline{AD} = r.\overline{AD},$$

d'où

$$V_0 - V = rI.\overline{AD}.$$

On trouverait de même

$$V_0 - V' = rI'.\overline{A'D'}.$$

Remplaçant I et I′ par leur valeur, il vient :

$$V_0 - V = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}(V_0 - V_1), \qquad V_0 - V' = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{A'B'}}(V_0 - V_1).$$

Donc

$$\frac{V_0 - V'}{V_0 - V} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{A'B'}} : \frac{AD}{AB}.$$

Le simple examen de la figure montre que la similitude des triangles auxquels appartiennent les droites A′D′, A′B′, AD et AB a pour conséquence l'égalité

$$\frac{\overline{A'D'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}.$$

Donc

$$V_0 - V' = V_0 - V,$$

et par suite

$$V' = V.$$

Donc enfin si on joint les points D′ et D par un conducteur il ne sera parcouru par aucun courant.

Mais on voit immédiatement que les triangles semblables CA′D′ et CAD d'une part, CD′B′ et CDB d'autre part, donnent la relation

$$\frac{\overline{A'D'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{D'B'}}{\overline{DB}},$$

qui peut être considérée comme une conséquence de l'égalité précédente et d'où on conclut

$$\overline{A'D'} \cdot \overline{DB} = \overline{AD} \cdot \overline{D'B'}.$$

Digitized by Google

Or les résistances des longueurs A'D', D'B', AD, DB étant proportionnelles à ces mêmes longueurs puisque la résistance r de l'unité de longueur est la même pour tous ces conducteurs, on a en le désignant par $R_1R_2R_3R_4$

$$R_1R_4 = R_3R_2.$$

Les points A et A' étant au même potentiel V, peuvent être confondus en un seul situé sur AA' ; il en est de même des points B et B', qu'on peut confondre en un seul situé sur BB'. Cette déformation de la figure ne changera rien aux conditions de l'égalité des potentiels des points D et D' mais transformera le trapèze ABB'A' en un quadrilatère identique au réseau du Pont de Wheatstone, la diagonale dépourvue de *f. e. m.* étant représentée par DD'.

L'équation $R_1R_4 = R_3R_2$ devient alors applicable au pont et nous fait connaître la condition à laquelle doivent satisfaire les quatre côtés 1, 2, 3, 4 pour que la diagonale ne soit parcourue par aucun courant. Nous verrons l'application qui a été faite de cette relation lorsque nous traiterons de la mesure des résistances.

315. — Théorème de M. Thevenin. — M. Thevenin a fait connaître un théorème simple et élégant concernant les réseaux de conducteurs et qui consiste en ceci : Si entre deux points quelconques d'un réseau de conducteurs, on vient à intercaler un nouveau conducteur, le courant qui le traverse a pour valeur le quotient de la *d. d. p.* primitive des deux points choisis, par la somme des résistances du conducteur et de celle du réseau, prise, bien entendu, entre les points considérés. On peut exprimer ce théorème plus simplement encore en disant que deux points quelconques du réseau sont comme les deux pôles d'une pile dont la résistance intérieure serait celle du réseau (mesurée en prenant les deux points comme représentant les extrémités d'un conducteur fictif) et dont la *f. e. m.* serait précisément égale à la *d. d. p.* des deux points avant leur réunion par le nouveau conducteur.

Digitized by Google

§ 7. — APPLICATIONS DIVERSES DE LA LOI D'OHM

316. — Shunt. — On donne le nom de *Shunt* (mot anglais qui signifie voie de garage ou d'évitement), à une dérivation placée entre deux points A et B qui sont déjà réunis par un conducteur et qui a pour but de dériver une portion connue à l'avance du courant qui passe dans ce conducteur. Désignons par R la résistance du conducteur qui réunit le point A au point B, par x la résistance du nouveau conducteur ou *Shunt* dont les extrémités aboutissent également aux points A et B du courant qui traverse l'ensemble des deux conducteurs ; par V_0 et V_1 les potentiels des points A et B, par I_R et I_x les intensités des courants qui passent dans le conducteur principal et dans le shunt et par I le courant *total* qui va du point A au point B, on aura les équations suivantes

$$I_R = \frac{V_0 - V_1}{R},$$

$$I_x = \frac{V_0 - V_1}{x},$$

$$I = \frac{V_0 - V_1}{\left(\frac{Rx}{R+x}\right)} = \frac{(R+x)(V_0 - V_1)}{Rx}.$$

On en conclut

$$\frac{I_R}{I} = \frac{x}{R+x},$$

$$\frac{I_x}{I} = \frac{R}{R+x}.$$

Si on veut que le rapport $\frac{I_R}{I}$ ait une valeur déterminée k, on doit satisfaire à la condition

$$\frac{x}{R+x} = k,$$

d'où

$$x = \frac{k}{1-k} R,$$

Digitized by Google

enfin

$$\frac{x}{R} = \frac{k}{1-k},$$

équation qui fait connaître le rapport de la résistance du shunt à celle du conducteur.

Si par exemple nous donnons à k les valeurs représentées par les fractions $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, nous trouvons pour le rapport $\frac{x}{R}$ les valeurs correspondantes $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$.

Pour que la valeur de k soit bien celle qu'on a voulu lui assigner, il faut évidemment que le rapport $\frac{x}{R}$ reste lui-même invariable ; il ne faut donc pas qu'il puisse être influencé par la température. Cette condition, à laquelle on ne fait pas assez attention, a une grande importance lorsqu'on shunte des instruments de mesure pour changer leur sensibilité, et il n'est pas superflu de montrer l'importance des erreurs auxquelles on peut être exposé par des variations de température si elles n'agissent pas d'une manière identique sur la résistance R de l'instrument de mesure et sur la résistance x du shunt.

Si on désigne par m le rapport $\frac{R}{x}$, on tire des équations ci-dessus

$$k = \frac{1}{m+1}$$

qui montre que les variations *relatives* [1] du rapport k sont *sensiblement* égales aux variations relatives du rapport $\frac{R}{x}$. Or ce dernier ne restera invariable que dans deux cas :

1° lorsque les circuits x et R sont faits avec un alliage insensible aux variations de température ;

2° lorsqu'ils sont faits avec le même métal et portés à la même température.

Si aucune de ces conditions n'est remplie, le rapport k pourra facilement éprouver des variations de plus de 5 °/₀, étant donné que

(1) On appelle variation relative d'une quantité, le rapport de la variation absolue de cette quantité à la valeur primitive qu'elle aurait dû conserver.

Digitized by Google

le coefficient de variation thermique des métaux bons conducteurs est, comme nous l'avons vu, voisin de $\frac{1}{250}$ par degré.

317. — Rhéostats. — On appelle rhéostats des instruments destinés à maintenir constante l'intensité d'un courant lorsqu'il est soumis à des causes quelconques de variation. Le principe de ces instruments est toujours le même ; l'introduction dans le circuit parcouru par le courant, d'une résistance plus ou moins grande, de façon que l'intensité donnée par l'équation

$$I = \frac{E}{R + x},$$

(dans laquelle E et R sont supposés variables par suite de causes accidentelles), soit ramenée à la valeur constante I_0, en donnant à la résistance x du rhéostat une valeur convenable.

On peut aussi appliquer les rhéostats d'une manière différente en les faisant servir à *dériver* une portion plus ou moins grande du courant que l'on veut maintenir constante dans une portion déterminée du circuit. Alors la résistance du rhéostat se détermine par une équation un peu différente.

Soit A et B (fig. 158) deux conducteurs de très grosse section n'opposant pas de résistance sensible au passage du courant variable I qui arrive en A et sort en B après s'être partagé entre les deux conducteurs C et R. Le conducteur C est formé par une résistance constante tandis que R est variable arbitrairement, dans le but de rendre constante la portion du courant général I qui traverse C et cela malgré les variations de I.

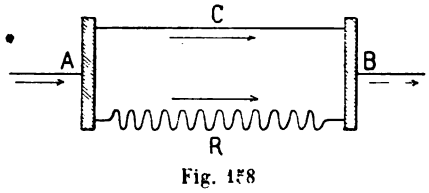

Fig. 158

On voit que cet ensemble constitue un *shunt* et que nous pouvons lui appliquer immédiatement les équations du numéro 316.

Digitized by Google

Désignons par R la résistance variable du rhéostat ARB, par C la résistance constante du circuit ACB où le courant est maintenu à la valeur invariable I_c, nous aurons en changeant simplement les lettres qui entrent dans ces équations

$$I = I_c + I_R, \qquad I_c = \frac{V_0 - V_1}{C}, \qquad I_R = \frac{V_0 - V_1}{R},$$

d'où

$$I_c = \frac{R(I - I_c)}{C}.$$

cette dernière équation fait connaître la valeur de la résistance R qu'il faut donner au rhéostat

$$R = \frac{CI_c}{I - I_c}.$$

Puisque les comparaisons des courants électriques avec des courants liquides viennent naturellement à l'esprit, nous disons que la première manière d'appliquer le rhéostat en le plaçant dans le courant même que l'on veut régler, équivaut en hydraulique à un robinet au moyen duquel on étrangle plus ou moins une conduite, tandis que la seconde manière équivaut à l'emploi d'un canal de dérivation ou déversoir.

318. — Rhéostat de Wartmann. — Voici enfin un procédé qui permet d'obtenir dans un conducteur un courant d'intensité et de sens variables, le courant pouvant prendre toutes les valeurs comprises entre $-I_0$ et $+I_0$.

Soit une circonférence ADA'D' (fig. 159) constituée par un fil métallique médiocrement conducteur ou par un canal circulaire de petite section creusé dans une planchette isolante et plein d'un liquide conducteur tel que le sulfate de cuivre.

Mettons les extrémités A et A' d'un même diamètre en communication avec un circuit parcouru par un courant qui entre en A et sort en A' après s'être partagé en deux portions égales qui traversent chacune les deux demi-circonférences ADA', AD'A'. En désignant par V_0 et V_1 les potentiels des points A et A'; par r_1 la résistance par unité de longueur de chacune des demi-circonférences

Digitized by Google

ADA′, AD′A′ ; par l la longueur de l'une d'elles, il est facile de trouver la valeur V du potentiel en un point C de la demi-circonfé-

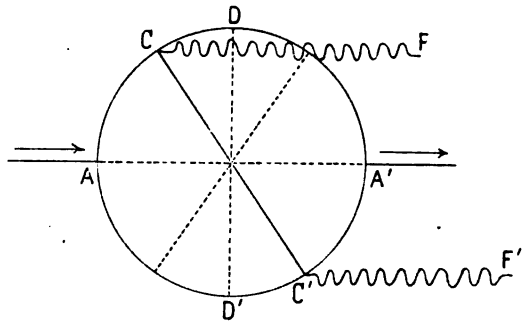

Fig. 159

rence ACA′. En effet l'intensité du courant qui parcourt cette demi-circonférence a pour valeur

$$I = \frac{V_0 - V_1}{r_1 l}.$$

Mais cette même intensité mesurée entre A et C est donnée par l'expression

$$I = \frac{V_0 - V}{r_1 x},$$

x désignant la longueur de l'arc AC.

On tire de ces deux équations

$$V = V_0 - \frac{(V_0 - V_1)x}{l}.$$

On trouverait de même pour la valeur V′ du potentiel du point C′ situé à l'extrémité C′ du diamètre CC′ mené par le point C

$$V' = V_0 - \frac{(V_0 - V_1)(l - x)}{l}.$$

La *d. d. p.* des deux points C et C′ a donc pour expression

$$V - V' = \frac{l - 2x}{l}(V_0 - V_1) = \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)(V_0 - V_1).$$

On voit immédiatement que cette *d. d. p.* est d'abord égale à $V_0 - V_1$ lorsque $x = 0$; puis qu'elle s'annule lorsque $x = \frac{l}{2}$

Digitized by Google

c'est-à-dire lorsque le diamètre CC′ fait un angle droit avec le diamètre AA′; et qu'à partir de cette position, $V - V'$ devient négatif et augmente en valeur absolue lorsque le diamètre mobile dépasse la position DD′. Enfin cette valeur devient égale à $-(V_0 - V_1)$ (c'est-à-dire précisément égale mais de signe contraire à la valeur initiale) lorsque le point C vient coïncider avec A′ et le point C′ avec A. On peut donc faire passer la *d. d. p.* $(V - V')$ des points C et C′ par toutes les valeurs possibles comprises entre $V_0 - V_1$ et $-(V_0 - V_1)$.

Si nous supposons maintenant que les points C et C′ soient reliés entre eux par un circuit très résistant, on pourra considérer, sans commettre d'erreur notable, les potentiels V et V′ comme étant encore représentés par les équations que nous venons de trouver, de sorte que si on désigne par R la résistance de ce circuit, l'intensité I_R du courant qui le traverse aura pour valeur

$$I_R = \frac{V - V'}{R} = \left(1 - \frac{2x}{l}\right)\frac{V_0 - V_1}{R}.$$

L'intensité de ce courant, proportionnelle à $\left(1 - \frac{2x}{l}\right)$, sera donc maxima pour $x = 0$, nulle pour $x = \frac{l}{2}$, et égale mais de signe contraire à la valeur maxima primitive, pour $x = l$.

Cet instrument permet donc de faire passer par transitions insensibles l'intensité d'un courant par toutes les valeurs comprises entre deux limites égales mais de signe contraire.

Nous avons supposé très grande la résistance du circuit qui relie les points C et C′ parce que, s'il en était autrement, les équations très simples que nous avons trouvées deviendraient inexactes et qu'il faudrait employer l'expression extrêmement compliquée (313) qui représente exactement l'intensité du courant dans l'une des diagonales (celle qui ne contient pas de *f. e. m.*) d'un réseau ayant quatre sommets et six conducteurs.

Si on considère attentivement la figure 159, on verra en effet que, en remplaçant par leurs cordes les arcs de cercle AC, CA′, A′C′, C′A, la figure devient identique à celle du pont de Wheatstone.

Mais, et c'est là le point intéressant, quelles que soient les valeurs

Digitized by Google

relatives des résistances du circuit circulaire ADA'D' et du circuit intercalé entre les points C et C', on obtient toujours ce résultat important de pouvoir faire passer graduellement l'intensité du courant qui traverse CC', par toutes les valeurs comprises entre $+I_0$ et $-I_0$, I_0 étant la valeur de I_R lorsque le point C coïncide avec A, et C' avec A'.

Les rhéostats comprennent deux classes distinctes : 1° les rhéostats de laboratoire destinés aux expériences de mesures et dans lesquels on peut ranger les boîtes de résistances; 2° les rhéostats industriels qui doivent être capables d'absorber sans détérioration de grandes quantités d'énergie. Nous décrirons les premiers en parlant des procédés de mesure des résistances et les seconds dans la partie de cet ouvrage relative aux machines dynamo-électriques.

319. — Application de la loi d'Ohm à la recherche du meilleur groupement d'une collection d'électro-moteurs. — Supposons que l'on possède une pile composée d'un certain nombre de couples et que l'on cherche l'intensité du courant produit dans une ligne d'une résistance R, lorsqu'on groupe ces couples soit en tension, soit en dérivation.

1° *Groupement en série ou en tension.* — Désignons par r la résistance de chaque couple et par e sa *f. e. m.* Etudions d'abord le groupement en tension. L'intensité du courant aura pour valeur

$$I = \frac{E}{R'},$$

E désignant la *f. e. m.* totale des couples et R' la résistance totale de la ligne ou circuit extérieur et des couples assemblés bout à bout. La *f. e. m.* totale aura évidemment pour valeur Ne et la résistance totale R' sera égale à $R + Nr$. L'intensité I du courant sera par conséquent donnée par l'équation

$$I = \frac{Ne}{R + Nr}.$$

On voit que le courant augmente en même temps que le nombre de couples N mais qu'il tend vers une limite finie lorsque N aug-

Digitized by Google

mente indéfiniment. Cette limite a pour valeur $\frac{e}{r}$ c'est-à-dire la valeur que prendrait le courant produit par un seul couple dont les pôles seraient réunis par un conducteur sans résistance. L'intensité limite dépend donc, non pas du nombre de couples, mais de la résistance intérieure de chacun d'eux.

2° *Groupement en dérivation ou en quantité.* — Si on réunit tous les couples par les pôles de même nom (fig. 160), la *f. e. m.* totale sera égale à celle d'un seul d'entre eux, mais la résistance intérieure

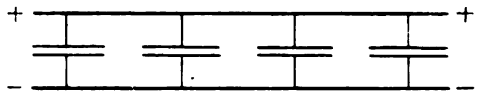

Fig. 160

de l'ensemble sera, d'après la loi établie pour des conducteurs égaux groupés en dérivation, égale à $\frac{r}{N}$. L'intensité I du courant sera donc donnée par la formule

$$I = \frac{e}{R + \frac{r}{N}} = \frac{Ne}{NR + r}.$$

L'intensité limite, lorsque N augmente indéfiniment, est égale à $\frac{e}{R}$. Elle est d'autant plus grande que R est plus petit, tandis que dans le groupement en série le groupement limite ne dépend que de r et nullement de R. On conclut de là que le groupement en série doit être employé lorsque la résistance extérieure R est grande, tandis que le groupement en dérivation convient au cas où la résistance extérieure est très petite.

3° *Groupement mixte.* — Supposons que l'on puisse décomposer le nombre N en un produit de deux facteurs c et d, de façon que l'on ait $N = cd$, que l'on groupe en série un nombre de couples égal à c et que tous les groupes ainsi obtenus dont le nombre est d soient à leur tour accouplés en dérivation c'est-à-dire par les pôles de même nom (fig. 161). La *f. e. m.* de cet ensemble est égale à celle des c couples montés en série, on a donc

$$E = ce.$$

Digitized by Google

La résistance intérieure d'un groupe de c couples montés en série est égale à cr et, comme il y a d groupes accouplés en dérivation,

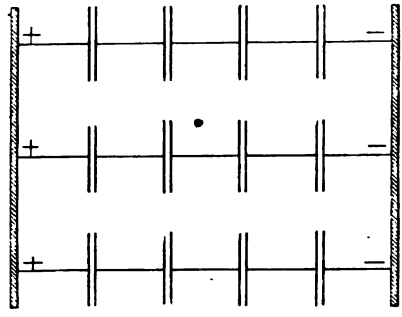

Fig. 161

la résistance de cet ensemble a pour valeur

$$\frac{cr}{d}.$$

L'intensité du courant est donc

$$I = \frac{ce}{R + \frac{cr}{d}} = \frac{cde}{Rd + rc} = \frac{Ne}{Rd + rc}.$$

Il y a un second mode de groupement mixte (fig. 162) qui consiste à accoupler *d'abord* en dérivation d couples ; on obtient ainsi c groupes que l'on assemble en série. La *f. e. m.* de chaque groupe

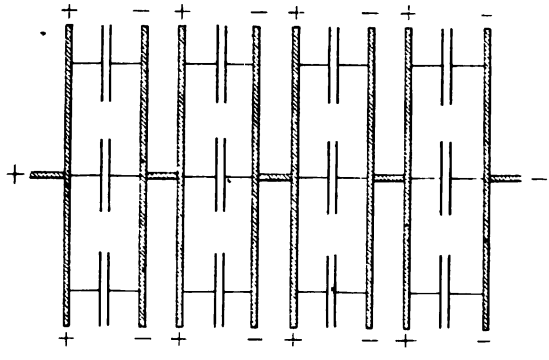

Fig. 162

est égale à e ; le nombre des groupes montés en série étant égal à c, leurs *f. e. m.* s'ajoutent et donnent une *f. e. m.* totale égale à ce.

Digitized by Google

La résistance intérieure d'un seul groupe est égale à $\frac{r}{d}$ puisque tous les couples de ce groupe sont montés en dérivation, et la résistance de l'ensemble des groupes montés en série est égale à

$$\frac{r}{d} \cdot c = \frac{cr}{d}.$$

On a donc pour l'intensité du courant

$$I = \frac{ce}{R + \frac{cr}{d}},$$

absolument comme dans le cas précédent bien que le groupement soit en apparence très différent. Mais il est évident que le groupement précédent est supérieur à celui-ci à plusieurs égards. Il comporte en effet beaucoup moins de conducteurs à grosse section pour l'accouplement des groupes en dérivation, et en outre, les couples n'ayant jamais une *f. e. m.* rigoureusement identique, il y a beaucoup plus de probabilité pour que les inégalités se compensent dans le groupement où les couples sont *d'abord* assemblés en série et forment des groupes que l'on assemble en dérivation. C'est donc le mode de groupement représenté par la figure 161 qui doit être préféré.

320. — **Détermination de la valeur des facteurs c et d qui correspondent au courant maximum.** — La relation

$$cd = N$$

donne

$$d = \frac{N}{c},$$

d'où, en remplaçant d par cette valeur dans l'expression de I,

$$I = \frac{Nce}{NR + rc^2},$$

N étant un nombre entier. On ne peut en réalité considérer cette formule comme représentant une fonction *continue* de c puisque c doit être, non seulement un nombre entier, mais encore être contenu un nombre entier de fois dans N. On ne peut donc, en toute rigueur, lui appliquer les méthodes qui permettent de trouver la valeur d'une variable qui, croissant par degrés infiniment petits, rend

Digitized by Google

maxima la fonction qui dépend d'elle. Mais il est facile de tourner la difficulté en traitant I et c comme des quantités continues, tout en convenant de ne tenir compte des résultats du calcul que lorsqu'ils donneront pour c une valeur correspondant à un diviseur exact de N, ou en prenant une valeur c' satisfaisant à cette dernière condition et se rapprochant le plus possible de la valeur de c résultant du calcul.

En considérant donc c comme une quantité qui peut croître par degrés infiniment petits et en cherchant quelle doit être sa valeur pour que celle de I soit un maximum, on trouve

$$c = \sqrt{\frac{NR}{r}}, \qquad \text{d'où} \qquad d = \sqrt{\frac{Nr}{R}}.$$

La résistance intérieure de l'ensemble des couples étant égale à $\frac{cr}{d}$, aura pour valeur, tout calculs faits,

$$\frac{cr}{d} = R.$$

La résistance de l'ensemble des couples sera donc alors précisément égale à celle du circuit extérieur. Ainsi lorsque la résistance du circuit extérieur est imposée et que l'on possède un certain nombre de couples doués d'une même *f. e. m.* que l'on peut grouper de toutes les manières possibles, le mode de groupement qui permet d'obtenir le courant le plus intense possible dans le circuit extérieur, est celui pour lequel la résistance intérieure de l'ensemble des couples se rapproche le plus possible de la résistance du circuit extérieur.

321. — La résistance intérieure d'un ensemble d'électro-moteurs groupés comme nous venons de le dire étant égale à $\frac{cr}{d}$, peut se mettre sous une forme qu'il est utile de connaître parce qu'elle nous servira dans la suite.

Si nous remplaçons le nombre d de groupes assemblés en dérivation par sa valeur en fonction de c, nous aurons, en vertu de la relation $N = cd$,

Digitized by Google

$$d = \frac{N}{c},$$

d'où

$$\frac{cr}{d} = \frac{c^2 r}{N},$$

ou encore

$$\frac{cr}{d} = \frac{Nr}{d^2}.$$

Nous avons montré d'ailleurs que la résistance intérieure de l'ensemble était la même, que le groupement fût représenté par la figure 161 ou par la figure 162; il résulte de là que les expressions que nous venons de trouver s'appliquent à ces deux cas et que l'on peut formuler la règle suivante :

La résistance intérieure d'un ensemble d'électro-moteurs est en raison inverse du carré du nombre des couples réunis par les pôles de même nom, ou proportionnelle au carré du nombre des couples réunis par les pôles de nom contraire, le nombre total des couples restant bien entendu invariable.

§ 8. — EXTENSION DES LOIS D'OHM AUX CONDUCTEURS A DEUX ET A TROIS DIMENSIONS

322. — Dans tout ce que nous avons dit jusqu'à présent concernant la loi d'Ohm, nous avons supposé que les conducteurs étaient filiformes; c'est-à-dire doués en réalité d'une seule dimension, la longueur ou, pour parler plus rigoureusement, que leur longueur était très grande par rapport à leurs dimensions transversales.

C'est en réalité le seul cas qui soit intéressant au point de vue des applications; mais il convient de dire quelques mots de la propagation du courant électrique dans les corps conducteurs ayant deux ou trois dimensions.

Considérons une plaque conductrice AD'B (fig. 163), en deux points A et B de laquelle aboutissent des conducteurs maintenus à des potentiels différents au moyen d'une source d'électricité. Le courant qui se propage de A vers B va se partager en une infinité

Digitized by Google

de filets; soit C_1C_4 une portion d'un de ces filets et C_2 un point infiniment voisin de C_1 et situé sur le trajet du courant C_1C_4.

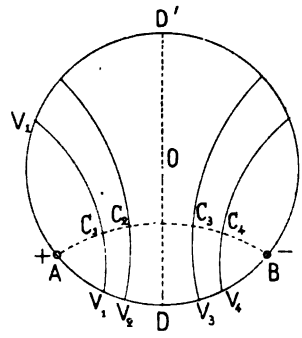

Fig. 163

Nous pouvons considérer C_1C_2 comme un conducteur filiforme et lui appliquer l'équation qui représente la loi d'Ohm.

Cette équation,

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R},$$

devient, en remplaçant R par l'expression $\rho\frac{l}{s}$ qui représente la résistance d'un conducteur filiforme de longueur l, de section s et de résistance spécifique ρ

$$\frac{I}{s} = \frac{(V_1 - V_2)}{\rho l}.$$

Mais dans le cas actuel, les quantités $V_1 - V_2$, l, I et s sont des infiniment petits, nous aurons donc

$$\frac{dI}{ds} = \frac{dv}{\rho dl}.$$

Cette équation exprime que, en un point quelconque de la plaque, la densité du courant est proportionnelle à la force $\frac{dv}{dl}$ appliquée à une masse électrique égale à l'unité se mouvant dans la direction dl (52) qui représente la normale commune à deux courbes équipotentielles infiniment voisines.

La plaque est donc couverte d'un réseau de courbes équipoten-

Digitized by Google

tielles et les filets de courants qui la sillonnent forment un second réseau de courbes qui coupent les premières à angle droit. En un mot, les lignes de courant sont les *trajectoires orthogonales* des lignes équipotentielles et réciproquement.

Kirchhoff a déterminé par le calcul la forme des courbes équipotentielles lorsque la plaque métallique est un cercle et que les deux conducteurs A et B sont situés sur le périmètre de ce cercle. Il a trouvé que ces courbes sont des circonférences ; il en est de même des courbes qui représentent les courants élémentaires qui sillonnent la plaque. L'expérience a confirmé les résultats du calcul d'une manière très satisfaisante.

Le procédé employé pour déterminer expérimentalement les points appartenant à une même courbe équipotentielle est des plus simples.

On place en un point C_1 de la plaque l'une des extrémités du fil d'un galvanomètre très sensible et on promène l'autre extrémité sur la plaque jusqu'à ce que l'instrument accuse un courant nul. Il est alors évident que les deux extrémités du fil du galvanomètre sont au même potentiel. On peut ainsi trouver très rapidement autant de points que l'on veut appartenant à la même courbe équipotentielle.

Pour déterminer les points d'une seconde courbe correspondant à un potentiel V_2 différant du premier, Kirchhoff a introduit dans le circuit du galvanomètre une petite pile thermo-électrique de *f. e. m.* connue et d'ailleurs très faible. En plaçant ensuite l'une des extrémités du circuit galvanométrique sur un point quelconque de la courbe équipotentielle correspondant à V_1 et en explorant ensuite la plaque avec l'autre extrémité, le galvanomètre indiquera un courant nul lorsque cette seconde extrémité touchera un point de la plaque dont le potentiel V_2 diffère du premier potentiel V_1 d'une quantité $V_1 - V_2$ précisément égale à la *f. e. m.* du couple thermo-électrique.

Les conducteurs à trois dimensions ont pu être aussi, dans un certain nombre de cas, l'objet d'expériences qui ont confirmé les prévisions de la théorie. Mais ces expériences ne sont possibles

Digitized by Google

qu'avec des liquides parce qu'il faut amener les sondes exploratrices, attachées aux extrémités du circuit galvanométrique, dans l'intérieur même du solide conducteur. En outre, les équations différentielles qui permettent de trouver la forme des surfaces équipotentielles (normalement auxquelles se propagent les courants élémentaires) ne peuvent être intégrées que dans un très petit nombre de cas.

Digitized by Google

CHAPITRE DEUXIÈME

TRAVAIL ÉLECTRIQUE DU COURANT

---

§ 1. — LOI DE JOULE

323. — Différentes expressions du travail électrique. — Nous avons vu, en étudiant les phénomènes qui accompagnent la décharge d'un condensateur, que l'énergie potentielle $\frac{1}{2}$ QV contenue dans les deux armatures se transforme en chaleur pendant le temps très court nécessaire pour ramener à zéro leur différence de potentiel. Nous avons même pu, grâce au principe de la conservation de l'énergie, calculer cette quantité de chaleur mais sans pouvoir préciser la façon dont elle se répartit entre les diverses portions du circuit, parce que ce calcul n'est possible que lorsqu'on connaît les chutes successives de potentiel d'une portion à une autre et que cela dépend surtout de leur résistance, c'est-à-dire d'un élément que nous avons vu apparaître pour la première fois en étudiant les lois qui régissent les courants permanents.

Lorsqu'une quantité d'électricité q est transportée d'un point où le potentiel est V_0 à un autre point où le potentiel est V_1, le travail mécanique développé est comme nous l'avons vu (**65**) égal à

$$q(V_0 - V_1).$$

Il résulte de là que si cette quantité q met un temps t pour passer du point qui est au potentiel V_0 au point qui est au potentiel V_1, le travail électrique produit *dans l'unité de temps* aura pour

Digitized by Google

expression

$$W = \frac{q}{t}(V_0 - V_1).$$

Mais lorsque le courant est permanent, le quotient $\frac{q}{t}$ représente précisément son intensité. Donc, le travail électrique produit entre les deux points d'un conducteur parcouru par un courant d'intensité I, est donné par l'équation

$$W = (V_0 - V_1)I.$$

Mais la loi d'Ohm nous permet d'établir une relation entre la résistance R du conducteur dont les extrémités ont entre elles une *d. d. p.* égale à $V_0 - V_1$ et l'intensité I du courant. On a en effet

$$I = \frac{V_0 - V_1}{R},$$

d'où on tire

$$W = \frac{(V_0 - V_1)^2}{R} = RI^2.$$

Nous avons donc en résumé les trois formes suivantes du travail électrique développé pendant l'unité de temps dans un fil de résistance R *qui ne contient aucune f. e. m.*

$$W = (V_0 - V_1)I, \qquad W = \frac{(V_0 - V_1)^2}{R}, \qquad W = RI^2.$$

Les raisonnements qui nous ont permis d'arriver à ces équations seraient absolument rigoureux, comme nous l'avons déjà dit, si on figurait un courant électrique par une série de petites sphères chargées d'électricité et glissant le long d'un fil isolant tendu entre deux sphères conductrices de très grand rayon maintenues aux potentiels V_0 et V_1. Si le fil servant de guide opposait au mouvement des petites sphères chargées d'électricité, une résistance mécanique (un frottement par exemple) proportionnel à leur charge et à leur vitesse, on arriverait pour la valeur du travail absorbé dans l'unité de temps par le frottement des sphères sur le fil, à des expressions équivalentes à celles que nous venons de trouver. La légitimité de ce raisonnement repose sur l'identité que présenteraient, dans beaucoup de cas, les phénomènes physiques que l'on pourrait produire avec deux corps de forme identique, mais dont l'un serait réellement conduc-

Digitized by Google

teur et *électrisé* sur toute sa surface, tandis que l'autre serait isolant et recouvert de sphères isolantes très petites, en très grand nombre, dénuées d'inertie et chargées d'une quantité électrique (égale à l'unité par exemple) qui ferait absolument corps avec elles et ne pourrait en être séparée.

De pareils raisonnements ne constituent nullement, comme on pourrait le croire, une hypothèse sur la nature de l'électricité, et la confirmation expérimentale des résultats qu'ils permettent de prévoir ne tend en aucune façon à prouver que l'électricité est un fluide composé de molécules dénuées de masse, pas plus que l'exactitude constamment vérifiée des déductions de la mécanique rationnelle ne prouve que les corps sont constitués par des *points matériels*.

324. — Quantité de chaleur développée dans un conducteur parcouru par un courant. — D'ailleurs, des vérifications expérimentales, aussi complètes que possible de ces équations, ont été faites par le physicien anglais Joule. Le travail développé par un courant électrique qui traverse un fil ne pouvait être mesuré sous forme mécanique, puisqu'aucun phénomène mécanique n'en révèle l'existence ; il a fallu avoir recours pour cette vérification à un moyen détourné qui se présente d'ailleurs de lui-même à l'esprit lorsqu'on examine les phénomènes d'échauffement que présente un fil traversé par un courant.

En vertu de l'équivalence entre la quantité de chaleur développée dans le fil et la quantité du travail mécanique disparu dans le même temps [1], il est facile de transformer les expériences mécaniques qui sont irréalisables en expériences calorimétriques qui sont, au contraire, faciles et susceptibles d'une grande exactitude.

Les résultats des expériences de Joule, qui ont été contrôlées et répétées par beaucoup d'autres physiciens, ont établi d'une façon complète l'exactitude des formules que nous venons de démontrer et qui permettent de calculer la quantité de chaleur développée pendant l'unité de temps dans un conducteur de résistance R traversé par un courant I.

[1] A la condition bien entendu que le passage du courant ne donne lieu dans le conducteur *à aucun autre travail* que celui qui résulte de l'échauffement de ce conducteur.

Digitized by Google

Nous avons déjà donné la valeur numérique de la quantité de chaleur qui correspond à un *erg* (**17**) ; il est facile d'en conclure le nombre de calories développées dans un circuit dont les données électriques sont exprimées en unités industrielles. L'unité de travail électrique employée dans l'industrie, ou *Watt*, étant égale à 10 000 000 d'*ergs* par seconde lorsque les autres quantités $V_0 - V_1$, I et R sont respectivement exprimées en Volts, Ampères et Ohms, il en résulte que l'équivalent calorifique d'un Watt est égal à

0,2398 *petites calories*[1]

ou

0,0002398 *grandes calories*.

Nous remplacerons dans les applications le nombre 0,2398 par le nombre bien plus simple 0,24, qui ne diffère du premier que de $\frac{1}{1200}$ de sa valeur. Nous aurons ainsi les formules suivantes, dans lesquelles Q désigne la quantité de chaleur développée pendant une seconde dans un conducteur :

$$Q = 0{,}24(V_0 - V_1)I, \qquad Q = 0{,}24\,\frac{(V_0 - V_1)^2}{R}, \qquad Q = 0{,}24\,RI^2.$$

Mais il faut bien prendre garde que, sur ces trois équations, la dernière seule est toujours applicable, qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas de *f. e. m.* à intercaler dans le conducteur dont les extrémités sont aux potentiels V_0 et V_1, tandis que les deux premières ne sont exactes que lorsque le conducteur ne contient pas de *f. e. m.*

325. — Cas où le conducteur contient une f. e. m. — Lorsque le conducteur dont les extrémités sont maintenues aux potentiels V_0 et V_1 contient une *f. e. m.* agissant en un de ses points ou dans une portion de sa longueur, il faut tenir compte du travail produit par cette *f. e. m.* qui agit absolument comme le ferait une *d. d. d.* (**300**) ; c'est-à-dire que, en désignant par E la *f. e. m.* et par I l'in-

(1) Nous rappelons que la petite calorie est la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 degré centigrade la température de 1 gramme d'eau. La grande calorie est 1000 fois aussi grande.

Digitized by Google

tensité du courant, le travail produit dans l'unité de temps par E sera égal à EI.

Par conséquent, si nous considérons un circuit fermé contenant une *f. e. m.* E et possédant une résistance *totale* R (y compris celle de la portion électro-motrice), le travail électrique total aura pour expression

$$W = EI,$$

ou, en vertu de l'équation

$$I = \frac{E}{R},$$

$$W = \frac{E^2}{R} = RI^2.$$

Si le circuit fermé contient une *f. e. m.* positive E_0, c'est-à-dire dans le sens du courant et une *f. e. m.* négative $E_1 < E_0$, le courant aura pour expression

$$I = \frac{E_0 - E_1}{R}.$$

Le travail *moteur* positif sera égal à E_0I.

Le travail *résistant* se composera de deux termes: 1° le travail négatif dû à la *f. e. m.* $-E_1$ et qui est égal à $-E_1I$; 2° le travail négatif dû au développement de chaleur dans le circuit, nous avons vu qu'il est égal à $-RI^2$. La somme algébrique de tous ces travaux devant être nulle ou, ce qui revient au même, le travail moteur devant être égal en valeur absolue à la somme des travaux résistants, on a

$$E_0I = E_1I + RI^2.$$

Nous savons, d'après les expériences de Joule, que le terme RI^2 représente le travail converti en chaleur pendant l'unité de temps dans le circuit de résistance R. Il faut maintenant expliquer la signification mécanique ou physique du terme E_1I. Si le courant électrique ne produisait pas d'autre phénomène que l'échauffement des conducteurs qu'il traverse, nous ne pourrions pas discerner dans un circuit les effets d'une *f. e. m.* inverse de ceux d'une résistance, ou du moins il n'y aurait en général que peu d'intérêt à le faire, le seul effet qui en résulterait étant une répartition des quantités de chaleur développée autre que celle que l'on conclurait de la loi

Digitized by Google

d'Ohm [1]. Mais il n'en est pas ainsi, le courant électrique étant capable de donner lieu à des manifestations très variées de l'énergie qu'il contient.

Nous verrons en effet qu'il peut produire du travail mécanique, des actions chimiques qui peuvent se traduire en travail, puisqu'elles ont pour effet de séparer deux corps dont la combinaison produit de la chaleur, des actions magnétiques qui peuvent aussi s'exprimer en travail mécanique, etc...

En vertu du principe de la conservation de l'énergie, la somme des travaux de toute nature développés dans le circuit pendant l'unité de temps, doit être égale au travail initial $E_0 I$ développé par la source d'électrité qui produit le courant. Donc, si nous désignons par $\mathfrak{T}$ la somme de tous les travaux autres que RI^2, qui représente le travail transformé en chaleur, nous aurons l'égalité

$$E_0 I = RI^2 + \mathfrak{T},$$

qui, rapprochée de la précédente, donne

$$E_1 I + RI^2 = \mathfrak{T} + RI^2,$$

d'où

$$\mathfrak{T} = E_1 I$$

et

$$E_1 = \frac{\mathfrak{T}}{I}.$$

Cette dernière équation nous montre que lorsqu'un travail de nature quelconque se produit dans un circuit, il donne naissance à une *f. e. m.* dont la valeur s'obtient en divisant ce travail rapporté à l'unité de temps par l'intensité du courant qui le produit.

326. — Travail calorifique fictif produit dans une résistance apparente. — Supposons que dans une portion du circuit se trouve intercalée une *f. e. m.* négative E_1. Si nous désignons la *d. d. p.* des extrémités de cette portion par $(V_0 - V_1)$ et sa résistance par R, nous aurons

$$I = \frac{(V_0 - V_1) - E_1}{R}.$$

[1] Tel serait par exemple le cas d'un cylindre de cuivre capable de tourner dans un champ magnétique pendant qu'il serait traversé par un courant emprunté à une source quelconque.

Digitized by Google

Si nous cherchons maintenant quelle doit être la résistance du conducteur considéré pour que, en supprimant la *f. e. m.* négative E_1, la même *d. d. p.* donne lieu au même courant, nous trouvons que cette résistance (**311**), à laquelle nous avons donné le nom de résistance apparente, a pour valeur

$$x = \frac{(V_0 - V_1)R}{(V_0 - V_1) - E_1}.$$

Il est intéressant de savoir si nous pouvons lui appliquer la loi de Joule, c'est-à-dire si le travail électrique $(V_0 - V_1)I$ produit par la *d. d. p.* est égal au produit de la résistance *apparente* x par le carré de l'intensité I du courant, absolument comme si la résistance x était réelle et qu'elle ne contînt pas de *f. e. m.*

Or c'est ce qui a lieu comme on peut le voir en remplaçant dans l'expression xI^2, x par

$$\frac{(V_0 - V_1)R}{(V_0 - V_1) - E_1},$$

et I^2 par

$$\frac{[(V_0 - V_1) - E_1]^2}{R^2}.$$

Il vient

$$xI^2 = \frac{(V_0 - V_1)[(V_0 - V_1) - E_1]}{R} = (V_0 - V_1)I.$$

327. Démonstration élémentaire de la Loi de Joule. — L'extrême importance de la Loi de Joule donne de l'intérêt à tout procédé de raisonnement ayant pour but d'en simplifier le plus possible la démonstration. C'est pourquoi nous croyons utile de faire connaître la démonstration suivante qui n'exige pas que l'on sache que le travail électrique, dans l'unité de temps, est mesuré par le produit de la *d.d.p.* par l'intensité du courant, et qui s'appuie seulement sur la loi d'Ohm. Soit AB (fig. 164) un conducteur de longueur l, de section s et de résistance $r = \rho\frac{l}{s}$ (305). Soit q la quantité de chaleur qu'il dégage dans l'unité de temps lorsqu'il est parcouru par le courant i. Formons un second conducteur A'B' (fig. 165) composé de deux fils parallèles ayant chacun une lon-

Digitized by Google

gueur $2l$ et une section s; la résistance de cet ensemble aura pour mesure

$$\rho \times \frac{2l}{2s} = \rho \frac{l}{s}.$$

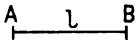

Fig. 164

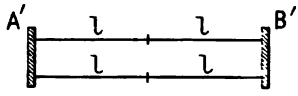

Fig. 165

Formons un troisième conducteur A″B″ (fig. 166) composé de trois fils parallèles ayant chacun une longueur $3l$ et une section s, la résistance de l'ensemble sera encore égale à

$$\rho \times \frac{3l}{3s} = \rho \frac{l}{s} = r.$$

Généralisons le procédé en formant un conducteur composé de n fils parallèles groupés en quantité et ayant chacun une longueur nl et une section s, la résistance de l'ensemble aura toujours la même valeur

$$\rho \frac{nl}{ns} = \rho \frac{l}{s} = r.$$

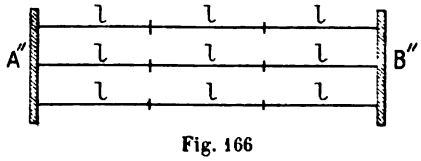

Fig. 166

Lançons maintenant dans le conducteur composé de deux fils, un courant égal à $2i$, chaque fil sera parcouru par un courant i et la quantité de chaleur développée dans chaque unité de longueur l, sera la même que celle que produit le passage du courant i dans le fil AB, c'est-à-dire égale à q. La quantité de chaleur développée dans le conducteur à deux fils sera donc égale au produit de la quantité q par le nombre de fois que le fil-type AB est contenu dans l'ensemble, c'est-à-dire égal à $4q$.

On verrait de même que le troisième conducteur composé de trois

Digitized by Google

fils parallèles ayant chacun une longueur $3l$, serait parcouru par un courant total égal à $3i$ et dégagerait une quantité de chaleur égale à $q \times 3 \times 3$; et qu'enfin, le conducteur composé de n fils parallèles de longueur nl, serait parcouru par un courant ni et dégagerait une quantité totale de chaleur égale à n^2q.

La loi apparaît clairement; tous ces conducteurs de même résistance r, mais parcourus par des courants d'intensités différentes, donnent lieu à des dégagements de chaleur proportionnels aux carrés de ces intensités.

Quant à la proportionnalité des quantités de chaleur aux résistances, elle apparaît clairement lorsqu'on considère des fils égaux placés bout à bout et parcourus par le même courant. La quantité de chaleur étant ainsi proportionnelle à R et à I^2, il est facile par un procédé souvent employé dans la géométrie élémentaire, de démontrer qu'elle est proportionnelle au produit RI^2.

Pour que la démonstration élémentaire que nous venons de donner soit absolument générale, il faut admettre que la quantité de chaleur, dégagée dans deux conducteurs *de même résistance* et parcourus par le même courant, est indépendante de leurs dimensions et de la substance qui les compose.

§ 2. — APPLICATIONS DE LA LOI DE JOULE

328. — Emploi du courant électrique pour évaluer numériquement toutes les formes de l'énergie. — Le courant électrique, pouvant produire des travaux très différents, offre un moyen facile d'établir une équivalence entre ces travaux. Voici la disposition qu'on peut adopter pour cela. Supposons qu'on veuille déterminer l'équivalent mécanique de la chaleur.

Un moteur électrique M (fig. 167) est placé dans un calorimètre C'C' percé d'ouvertures pour laisser passer son axe de rotation muni d'une poulie P sur laquelle on place un frein dynamométrique destiné à la mesure du travail produit. Le courant qui l'anime traverse un conducteur A'B' dans lequel on intercale un rhéostat R' et un

Digitized by Google

galvanomètre ou rhéomètre destiné à faire connaître l'intensité du courant.

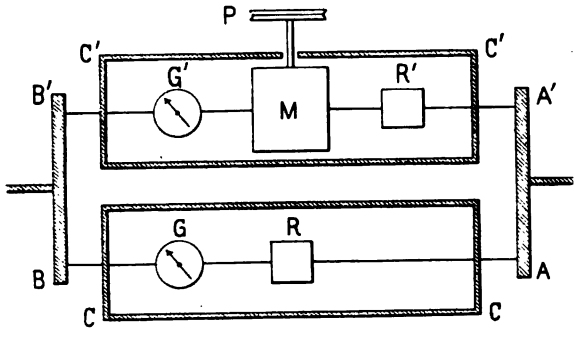

Fig. 167

A côté du calorimètre C'C' est placé un second calorimètre CC dans lequel se trouve simplement un rhéostat R et un rhéomètre G identique à G' ; ces deux appareils sont intercalés dans le conducteur AB.

Les deux conducteurs AB, A'B' sont reliés au circuit général qui leur amène le courant, par des barres métalliques AA', BB' que l'on peut considérer comme dénuées de résistance et par suite comme étant au même potentiel dans toute leur étendue. Le régime du moteur électrique étant établi (et il dépend de la charge du frein dynamométrique qui agit sur la poulie P ainsi que de l'intensité du courant A'B'), on agit sur l'un des rhéostats R ou R' jusqu'à ce que l'intensité du courant soit rigoureusement la même dans les deux conducteurs AB, A'B' ; il n'est même pas besoin de la connaître en valeur absolue.

Les calorimètres CC, C'C' doivent être des appareils à écoulement continu et à température constante, dans lesquels la quantité de chaleur fournie à l'eau est mesurée par le produit du poids d'eau qui traverse l'appareil dans l'unité de temps, multiplié par la différence des températures stationnaires de l'eau à l'entrée et à la sortie du calorimètre.

Désignons par V_0 et V_1 les potentiels des barres AA' et BB', et par I l'intensité des courants égaux qui traversent les deux calorimètres.

Digitized by Google

Le travail développé par le courant dans le calorimètre C est purement calorifique, il a pour valeur $(V_0 - V_1)I$.

Le travail développé dans le calorimètre C' se décompose en deux parties distinctes : 1° le travail converti en chaleur et qui est accusé par le calorimètre ; 2° le travail mécanique recueilli sur la poulie P et mesuré à l'aide du frein qui le transforme aussi en chaleur ; mais cette chaleur étant dégagée en dehors du calorimètre C', est simplement dispersée en tous sens et n'est pas mesurée.

Désignons par c la quantité de chaleur cédée dans l'unité de temps au calorimètre C, par c' celle qui est cédée au calorimètre C', par A l'équivalent mécanique d'une calorie (en unités C. G. S.) et par $\mathfrak{T}$ le travail mécanique mesuré sur la poulie P. Nous aurons les équations suivantes :

$$(V_0 - V_1)I = Ac \qquad (V_0 - V_1)I = Ac' + \mathfrak{T}$$

d'où
$$Ac = Ac' + \mathfrak{T}$$

et
$$A = \frac{\mathfrak{T}}{c - c'}.$$

Cette dernière équation donne donc la valeur de l'équivalent mécanique d'une calorie. Le courant électrique qui a servi d'intermédiaire disparaît de l'équation finale.

329. — Si on voulait mesurer par le même procédé l'équivalence entre une action mécanique et une action chimique telle que la décomposition de l'eau, on adjoindrait à ces deux calorimètres un troisième calorimètre (non représenté sur la figure) contenant un voltamètre destiné à recueillir les produits de la décomposition de l'eau, et recevant le courant électrique des barres AA', BB'. Ce troisième calorimètre contiendrait, bien entendu, un rhéostat destiné à régler l'intensité du courant qui le traverserait de manière qu'il fût rigoureusement égal à chacun des deux autres. En appelant $\mathfrak{T}'$ le travail (autre que celui qui se transforme en chaleur) développé dans ce troisième calorimètre, et c'' la quantité de chaleur qui lui est cédée dans l'unité de temps, on aurait

$$(V_0 - V_1)I = Ac'' + \mathfrak{T}',$$

Digitized by Google

d'où

$$\mathcal{C}' = Ac - Ac'' = \frac{c - c''}{c - c'}\mathcal{C}.$$

Cette équation ferait connaître l'énergie absorbée par le voltamètre ou plutôt toutes les formes de l'énergie autres que la chaleur; car il faut remarquer que : 1° la décomposition de l'eau donne lieu à des gaz qui occupent un volume très supérieur à celui de l'eau qui les a engendrés et qui produisent, en refoulant malgré la pression atmosphérique l'eau contenue dans les éprouvettes du voltamètre, un travail mécanique dont la mesure échappe au calorimètre; 2° l'oxygène qui se dégage est dans des conditions particulièrement favorables pour se transformer en ozone, c'est-à-dire en un état allotropique qui exige pour se produire une certaine dépense d'énergie.

Il est donc nécessaire, lorsqu'on emploie le procédé que nous venons de décrire, d'analyser avec soin tous les phénomènes accessoires auxquels donne lieu le phénomène principal soumis à l'expérience et de tenir soigneusement compte de ceux qui entraînent une dépense ou une production d'énergie dont la forme finale n'est pas de la chaleur.

330. — Les trois calorimètres placés parallèlement et parcourus par des courants d'égale intensité, sont constamment refroidis par l'eau de circulation qui entre dans le premier calorimètre CC à la température t_0 et en sort à la température t_1, puis entre immédiatement dans le second calorimètre C'C' à cette même température t_1 et en sort à la température t_2 et se rend enfin au troisième calorimètre, où elle entre à la température t_2 pour en sortir à la température t_3.

Chacun d'eux est donc parcouru par le même poids p d'eau dans l'unité de temps et, lorsque les températures t_0, t_1, t_2, t_3 sont devenues stationnaires, les quantités de chaleur c, c', c'' enlevées dans l'unité de temps aux appareils placés dans chaque calorimètre, ont respectivement pour valeur

$$c = p(t_1 - t_0), \qquad c' = p(t_2 - t_1), \qquad c'' = p(t_3 - t_2).$$

Ces valeurs transportées dans l'équation qui fait connaître $\mathcal{C}'$ donnent

Digitized by Google

$$\mathcal{C}' = \frac{(t_1 - t_0) - (t_3 - t_2)}{(t_1 - t_0) - (t_2 - t_1)} \mathcal{C}$$

Cette équation ne contient pas la quantité d'eau p qui traverse les calorimètres dans l'unité de temps ; l'expérience se réduit donc à la mesure aussi exacte que possible des températures et du travail mécanique. En considérant comme connue la valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur A, on pourrait réduire à deux le nombre des calorimètres et ne conserver que CC et C'C'.

331. — Calcul de l'élévation de température produite par le passage d'un courant dans un conducteur qui ne peut se refroidir. — La quantité de chaleur développée par le passage d'un courant dans un conducteur étant proportionnelle au temps, aurait pour conséquence une élévation de température indéfinie de ce conducteur si les pertes de chaleur dues au rayonnement et à la conductibilité des corps sur lesquels il s'appuie, pertes qui croissent avec l'excès de sa température sur celle du milieu ambiant, n'atteignaient rapidement une valeur égale à celle de la chaleur engendrée par le courant. Quand cette égalité est atteinte, la température devient stationnaire. La loi de Joule suffit pour calculer l'élévation de température d'un conducteur lorsqu'il ne peut perdre sa chaleur, mais lorsque le contraire a lieu (et c'est le cas général), il faut encore connaître les lois du refroidissement d'un corps plongé dans une enceinte dont la température est inférieure à la sienne. Nous commencerons donc par calculer l'échauffement d'un conducteur qui ne peut perdre sa chaleur, ou, comme on dit en thermo-dynamique, l'échauffement *adiabatique*.

Soit s la section du conducteur ; l sa longueur ; ρ sa résistance spécifique ; c sa chaleur spécifique par *unité de volume* ; I l'intensité du courant qui le traverse, et A l'équivalent mécanique d'une calorie.

Le travail converti en chaleur dans l'unité de temps par le passage du courant, est égal au produit de la résistance du conducteur, $\rho \frac{l}{s}$, par le carré I^2 de l'intensité du courant. La quantité de

Digitized by Google

chaleur q développée a donc pour valeur

$$q = \frac{1}{A} \rho \frac{l I^2}{s},$$

que l'on peut écrire

$$q = \frac{1}{A} \rho \frac{ls I^2}{s^2} = \frac{1}{A} \rho ls \left(\frac{I}{s}\right)^2.$$

Mais le produit ls est l'expression du volume u du conducteur, et $\frac{I}{s}$ est ce que nous avons appelé la densité du courant que nous désignerons par i. La quantité de chaleur peut donc se mettre sous la forme très simple

$$q = \frac{1}{A} \rho u i^2.$$

L'élévation de la température t du conducteur pendant l'unité de temps s'obtient immédiatement en écrivant que la quantité de chaleur q qui lui est fournie est égale à cut. On a donc

$$\frac{1}{A} \rho u i^2 = cut,$$

d'où

$$t = \frac{1}{A} \frac{\rho}{c} i^2.$$

Ainsi, la rapidité de l'échauffement adiabatique est proportionnelle au carré de la densité du courant et au rapport de la résistance spécifique à la chaleur spécifique de l'unité de volume.

Exemple numérique. — Pour appliquer cette formule numériquement, il faut avoir soin d'exprimer i en ampères par centimètre carré ; ρ en ohms ; c représentant le nombre de calories-grammes-degrés nécessaire pour élever de 1° la température de un centimètre cube de la substance du conducteur. On l'obtient en multipliant le rapport de la chaleur spécifique de cette substance à celle de l'eau, par le rapport de sa densité à celle de l'eau. Enfin

$$\frac{1}{A} = 0.24 \qquad (324)$$

On obtient ainsi pour la valeur de t après une seconde :

$$t = 0{,}24 \frac{\rho}{c} i^2.$$

Si on prend pour exemple un conducteur en cuivre rouge parcouru par

Digitized by Google

un courant de 100 ampères par centimètre carré, la densité du cuivre étant égale à 9, sa chaleur spécifique, à 0,095, la valeur de c est égale à $9 \times 0{,}095 = 0{,}855$. Enfin sa résistance spécifique ρ étant égale à

$$\frac{1^{\omega},6}{1000000},$$

on trouve :

$t = 0°,00449$ par seconde ou $0°,269$ par minute ou $16°$ par heure.

La rapidité de l'échauffement adiabatique dépendant de la valeur du rapport $\frac{\rho}{c}$, sera très considérable avec un corps ayant une grande résistance spécifique et une faible chaleur spécifique par unité de volume. De tous les métaux usuels, le plomb est celui pour lequel ce rapport $\frac{\rho}{c}$ est le plus grand possible (près de 30 fois aussi grand que pour le cuivre). Il a, en outre, la propriété de fondre à une température relativement peu élevée. Il résulte de là que si un conducteur de plomb est intercalé entre deux conducteurs de cuivre et que l'ensemble soit tout à coup parcouru par un courant de densité assez considérable, le plomb s'échauffera près de 30 fois aussi rapidement que le cuivre et qu'il pourra, au bout de quelques secondes, entrer en fusion et rompre le circuit avant que les conducteurs de cuivre aient eu le temps de s'échauffer notablement. C'est à cet usage que servent les *plombs fusibles* qui ont pour but de rompre un courant lorsque son intensité dépasse accidentellement une limite fixée à l'avance.

332. — Température stationnaire d'un conducteur traversé par un courant. — Lorsque la chaleur due au passage du courant est enlevée au fur et à mesure qu'elle se produit, la température ne peut monter indéfiniment parce que les pertes de chaleur par unité de temps croissant avec elles, tandis que la quantité de chaleur produite par le courant conserve une valeur constante, il arrive nécessairement un moment où la quantité de chaleur enlevée devient égale à celle que produit le courant.

Dans les limites d'échauffement tolérées pour les conducteurs électriques (surtout ceux qui sont recouverts de substances isolantes), on peut considérer la quantité de chaleur perdue par unité de surface refroidie, comme étant proportionnelle à l'excès de la température de cette surface sur celle de l'enceinte dans laquelle se trouve le conducteur. C'est ce qu'on appelle ordinairement la loi de Newton

Digitized by Google

quoique ce soit simplement l'expression d'une loi beaucoup plus générale qui s'étend à tous les phénomènes naturels et qui consiste en ce que lorsque deux quantités sont liées entre elles par une loi quelconque, si l'on fait croître l'une d'elles par degrés égaux et très petits, il en résulte pour l'autre quantité des accroissements proportionnels aux premiers. C'est d'ailleurs cette loi qui sert de base au calcul infinitésimal.

Conservons les notations du numéro précédent et désignons en outre par λ la longueur du périmètre du conducteur considéré, et par q_1 la quantité de chaleur qui est perdue dans l'unité de temps par l'unité de surface du conducteur, lorsque sa température excède de 1 degré centigrade celle du milieu.

La quantité de chaleur due au courant est égale à

$$\frac{1}{A}\frac{\rho l I^2}{s}.$$

La quantité de chaleur perdue par la surface latérale du conducteur est représentée par le produit de q_1 par la grandeur de cette surface et par l'excès t de la température stationnaire sur la température extérieure. Elle est donc égale à

$$q_1 \lambda l t.$$

Lorsque la température stationnaire est atteinte, on a

$$\frac{1}{A}\frac{\rho l I^2}{s} = q_1 \lambda l t,$$

d'où

$$t = \frac{1}{A}\frac{\rho I^2}{q_1 \lambda s}.$$

Si le conducteur était un fil cylindrique de diamètre d, on aurait

$$\lambda = \pi d$$

$$s = \frac{\pi d^2}{4},$$

d'où

$$t = \frac{4\rho I^2}{A\pi^2 q_1 d^3}$$

et

$$I = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{A q_1 d^3 t}{\rho}}.$$

Digitized by Google

Cette dernière équation montre que l'intensité I, correspondante à une température stationnaire donnée t, croît comme la puissance $\frac{3}{2}$ du diamètre, c'est-à-dire moins vite que la section qui est proportionnelle à la puissance 2. Les gros conducteurs sont donc désavantageux à ce point de vue et il vaut mieux avoir une collection de petits conducteurs séparés les uns des autres et pouvant perdre leur chaleur sans se gêner mutuellement.

Dans certains cas particuliers que nous étudierons plus tard, la quantité de chaleur enlevée par le rayonnement est insuffisante pour des valeurs modérées de t et, pour empêcher les conducteurs d'atteindre des températures très élevées, il faut avoir recours à des procédés spéciaux tels que la ventilation artificielle ou l'immersion dans un liquide non conducteur.

333. — Au lieu de se donner l'intensité du courant qui traverse le conducteur, on peut prendre comme variable indépendante la *d. d. p.* qui existe entre les deux extrémités de ce conducteur ; la quantité de chaleur produite est alors exprimée par l'équation (323)

$$q = \frac{1}{A} W = \frac{1}{A} \frac{(V_0 - V_1)^2}{R} = \frac{1}{A} \frac{(V_0 - V_1)^2}{\left(\frac{\rho l}{s}\right)} = \frac{1}{A} \frac{(V_0 - V_1)^2 s}{\rho l}.$$

En l'égalant à la chaleur perdue $q_1 \lambda l t$, on trouve

$$t = \frac{(V_0 - V_1)^2 s}{A q_1 \rho \lambda l^2},$$

expression très différente de celle qui donne t en fonction de I, du moins quant à l'influence des dimensions du conducteur et de sa résistance spécifique.

Si on suppose que le conducteur soit un fil cylindrique, on trouve

$$t = \frac{1}{4A} \cdot \frac{d}{q_1 \rho l^2} (V_0 - V_1)^2.$$

Ces équations nous seront utiles lorsque nous décrirons des ampèremètres et des voltmètres basés sur la mesure de la température stationnaire d'un fil traversé par un courant.

Digitized by Google

334. — Répartition du travail électrique dans un circuit. — Le travail électrique total produit pendant l'unité de temps dans un circuit fermé contenant une *f. e. m.* E, a pour expression

$$W_0 = EI.$$

Ce travail se répartit entre les différentes portions du circuit suivant une loi facile à déterminer. En effet, soit r_0 la résistance de la portion du circuit où la *f. e. m.* prend naissance, r_1 la résistance d'une autre portion destinée à amener le courant dans l'endroit où une troisième portion de résistance r_2 est employée à produire une quantité de chaleur que l'on utilise à un usage quelconque. Désignant par q_0, q_1, q_2 les quantités de chaleur dégagées dans chacune des portions du circuit, nous aurons

$$q_0 = \frac{1}{A} r_0 I^2,$$

$$q_1 = \frac{1}{A} r_1 I^2,$$

$$q_2 = \frac{1}{A} r_2 I^2,$$

et remarquant que le travail électrique total EI développé par la source est égal à la somme des travaux partiels développés dans l'ensemble du circuit, il vient

$$EI = r_0 I^2 + r_1 I^2 + r_2 I^2,$$

ou, en divisant par EI,

$$\frac{r_0 I^2}{EI} + \frac{r_1 I^2}{EI} + \frac{r_2 I^2}{EI} = 1.$$

Les fractions $\frac{r_0 I^2}{EI}$, etc., représentent la fraction du travail total EI développé par la *f. e. m.*, qui est transformée en chaleur dans les résistances r_0, r_1, etc. On voit que pour chacune des résistances, cette fraction est proportionnelle aux rapports $\frac{r_0 I}{E}$, $\frac{r_1 I}{E}$, etc. Mais, en désignant par ε_1, ε_2 les *d. d. p.* des extrémités des résistances r_1, r_2, qui ne contiennent pas de *f. e. m.*, on a

$$\varepsilon_1 = r_1 I,$$

$$\varepsilon_2 = r_2 I.$$

Digitized by Google

Donc, le rapport de l'énergie transformée en chaleur dans les résistances r_1, r_2 à l'énergie totale EI, a pour valeur

$$\frac{\varepsilon_1}{E}, \qquad \frac{\varepsilon_2}{E}.$$

Enfin, en vertu de la relation

$$E = (r_0 + r_1 + r_2)I,$$

ces rapports peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{r_1}{r_0 + r_1 + r_2}, \qquad \frac{r_2}{r_0 + r_1 + r_2}.$$

Si nous nous proposons de développer, dans la portion du circuit dont la résistance est r_2, une certaine quantité de chaleur équivalente à un travail déterminé par seconde, on voit que ce travail devra satisfaire à l'équation

$$r_2 I^2 = \mathfrak{C}_2,$$

tandis que le travail total développé par la source, a pour valeur EI ; l'intensité du courant est donnée par l'équation

$$I = \frac{E}{r_0 + r_1 + r_2}.$$

Nous sommes donc amenés à résoudre le problème suivant :

Etant donné; 1° la *f. e. m.* d'une source, 2° sa résistance intérieure r_0, 3° une résistance additionnelle r_1 que nous appellerons résistance de la ligne; déterminer la résistance r_2 d'un conducteur dans lequel on recueillera, sous forme de chaleur, un travail électrique donné $\mathfrak{C}_2$. Les relations démontrées plus haut nous donneront

$$EI = (r_0 + r_1)I^2 + \mathfrak{C}_2,$$

d'où

$$I = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - 4(r_0 + r_1)\mathfrak{C}_2}}{2(r_0 + r_1)}.$$

La valeur de I ne peut être réelle que si on a

$$E^2 - 4(r_0 + r_1)\mathfrak{C}_2 > 0$$

ou

$$\mathfrak{C}_2 < \frac{E^2}{4(r_0 + r_1)}.$$

Le second membre de cette inégalité représente donc la limite du

Digitized by Google

travail que l'on peut développer dans la résistance r_2. Lorsque cette limite est atteinte, le courant a pour valeur

$$I = \frac{E}{2(r_0 + r_1)},$$

c'est-à-dire la moitié de l'intensité qu'il aurait si on faisait $r_2 = 0$.

Il résulte de là que, pour obtenir dans la résistance variable r_2 la quantité de travail la plus grande possible, on doit lui donner une valeur telle que l'intensité du courant soit réduite à la moitié de ce qu'elle serait si le circuit était réduit à $r_0 + r_1$, ou que, enfin, on doit prendre $r_2 = r_0 + r_1$.

On exprime ce résultat en disant que pour obtenir le travail électrique (sous forme de chaleur) le plus grand possible dans un conducteur de résistance variable intercalé dans un circuit dans lequel la résistance intérieure de la source et celle de la ligne sont imposées, on doit donner à la résistance du conducteur une valeur égale à celle de la source et de la ligne réunies.

La résistance r_2 se conclut facilement de l'équation qui donne I en remarquant que

$$I = \frac{E}{r_0 + r_1 + r_2}.$$

En égalant cette valeur de I à la première, on trouve pour r_2 la valeur

$$r_2 = (r_0 + r_1)\left[\frac{2E}{E \pm \sqrt{E^2 - 4(r_0 + r_1)\mathcal{C}_2}} - 1\right].$$

335. — Choix à faire entre les deux valeurs de la résistance utile r_2. — L'intensité du courant se présente sous une forme qui prête à l'ambiguïté, puisqu'elle contient un radical affecté de deux signes contraires. Est-il indifférent de choisir l'une ou l'autre des deux valeurs ? Pour répondre à cette question, nous devons chercher s'il n'existe pas de condition non énoncée dans le problème et qui, introduite maintenant dans la solution, pourrait déterminer notre choix. Il est d'ailleurs certain que les deux solutions sont possibles et qu'on ne se trouve pas là en présence d'un de ces cas, fréquents dans les problèmes qui conduisent à une équation du second degré

Digitized by Google

et où l'une des racines donne lieu à une solution qui, bien que réelle dans le sens algébrique du mot, est incompatible avec les données de la question.

Pour déterminer notre choix, nous allons examiner si les deux valeurs données au courant sont également avantageuses au point de vue du *rendement économique*, c'est-à-dire si le rapport de la quantité de travail converti en chaleur dans la résistance r_2 à la quantité totale d'énergie EI produite par la source, est le même lorsqu'on choisit le signe + ou le signe —.

Cette question est facile à trancher car la quantité de travail développée dans r_2 étant constante, égale à $\mathcal{C}_2$ d'une part, tandis que celle qui est dépensée dans le reste du circuit est égale à $(r_0 + r_1)I^2$, on a intérêt, pour augmenter le rendement économique, à diminuer autant que possible $(r_0 + r_1)I^2$. Mais r_0 et r_1 étant donnés, on ne peut disposer que de I, il faut donc choisir la valeur de I la plus petite possible, c'est-à-dire choisir la plus petite des deux valeurs ou celle qui correspond au signe —. Mais alors cela nous conduira à prendre pour r_2 la valeur la plus grande, de sorte que nous écrivons notre équation

$$r_2 = (r_0 + r_1)\left[\frac{2E}{E - \sqrt{E^2 - 4(r_0 + r_1)\mathcal{C}_2}} - 1\right].$$

336. — Expression du rendement économique. — Lorsque le travail se produit dans la partie utile du circuit sous forme de chaleur, le rendement économique prend une expression très simple. En effet, la quantité d'énergie totale produite par la source dans l'unité de temps est égale à EI, elle est égale à l'énergie totale dépensée sous forme de chaleur dans l'ensemble du circuit, ou à $r_0I^2 + r_1I^2 + r_2I^2$.

Le rendement économique est donc, d'après la définition que nous venons d'en donner, égal à

$$\frac{r_2I^2}{r_0I^2 + r_1I^2 + r_2I^2} = \frac{r_2}{r_0 + r_1 + r_2} = \frac{\mathcal{E}_2}{E},$$

valeur déjà donnée plus haut (**334**). Ainsi le rendement économique

Digitized by Google

a pour mesure le rapport de la *d. d. p.* (entre les extrémités du conducteur dans lequel le courant produit l'énergie utilisable) à la *f. e. m.* de la source d'électricité.

337. — Cas où la résistance utile contient une f. e. m. inverse. — Supposons que la résistance utile r_2, au lieu d'être constituée par un fil inerte qui transforme toute l'énergie en chaleur, contienne un appareil capable de développer une *f. e. m.* inverse de celle du courant ; nous avons vu (325) que cela a lieu chaque fois que le courant produit un travail ; désignons ce travail par $\mathcal{C}_1$, en convenant expressément, comme nous l'avons déjà dit, qu'il se manifeste sous une forme différente de la forme calorifique. Désignons également par $\mathcal{C}_0$ le travail que développe la *f. e. m.* E_0 à l'origine du circuit ; par R la résistance *totale* $r_0 + r_1 + r_2$ des différentes parties du circuit ; et par E_1 la *f. e. m.* inverse dont l'existence est nécessaire pour la production du travail $\mathcal{C}_1$. Nous aurons les équations suivantes ;

$$I = \frac{E_0 - E_1}{R},$$

$$\mathcal{C}_0 = E_0 I, \qquad \mathcal{C}_1 = E_1 I,$$

$$\frac{\mathcal{C}_1}{\mathcal{C}_0} = \frac{E_1}{E_0} = k,$$

k désignant le coefficient de rendement économique, on voit qu'il ne dépend que des *f. e. m.* directes et inverses et nullement de la résistance R du circuit. Remplaçant dans les valeurs de $\mathcal{C}_0$ et de $\mathcal{C}_1$, I par sa valeur tirée de la première équation, il vient

$$\mathcal{C}_0 = \frac{E_0(E_0 - E_1)}{R}, \qquad \mathcal{C}_1 = \frac{E_1(E_0 - E_1)}{R}.$$

Si nous cherchons la valeur absolue du travail perdu $\mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_1$, nous trouvons

$$\mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_1 = \frac{E_0^2 - 2E_0E_1 + E_1^2}{R} = \frac{(E_0 - E_1)^2}{R} = \frac{(RI)^2}{R} = RI^2.$$

Ainsi le travail perdu dans l'ensemble du circuit est égal à RI^2, c'est-à-dire au travail transformé en chaleur (Loi de Joule) dans la totalité du circuit comme cela doit être.

Digitized by Google

Supposons que l'on se donne la valeur du coefficient économique k ; la relation

$$k = \frac{E_1}{E_0},$$

donne

$$E_1 = kE_0.$$

Remplaçant E_1 par cette valeur, il vient

$$\mathcal{C}_0 = \frac{(1-k)E_0^2}{R}, \qquad \mathcal{C}_1 = \frac{k(1-k)E_0^2}{R}.$$

Ces deux équations montrent qn'on peut transmettre une fraction déterminée k du travail $\mathcal{C}_0$ à travers une résistance R aussi grande qu'on voudra, à la seule condition de faire croître E_0 et E_1 proportionnellement à la racine carrée de la résistance totale. Mais il en résulte comme conséquence que l'intensité du courant I doit au contraire décroître à mesure que la résistance R augmente, car l'équation $\mathcal{C}_0 = E_0 I$ donne

$$I = \frac{\mathcal{C}_0}{E_0} = \frac{(1-k)E_0}{R} = \sqrt{\frac{(1-k)\mathcal{C}_0}{R}},$$

qui montre que, à égalité de rendement économique, le courant doit être proportionnel à la racine carrée du travail dépensé à l'origine du circuit et en raison inverse de la racine carrée de la résistance totale.

En y joignant la valeur de E_0

$$E_0 = \sqrt{\frac{R\mathcal{C}_0}{1-k}},$$

on aura les équations qui résument les lois de la transmission de l'énergie sous toutes ses formes, au moyen de l'électricité.

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — Supposons que l'on prenne $\mathcal{C}_0 = 10\,000$ Watts ou environ 136 chevaux (le cheval-vapeur équivaut à 736 Watts), et que l'on veuille récupérer un travail de 7000 Watts à travers une résistance *totale* de 100 Ohms. On demande la valeur de E_0, E_1 et I.

On a

$$k = \frac{7000}{10000} = 0{,}7,$$

Digitized by Google

et on trouve

$$E_0 = \sqrt{\frac{100 \times 10000}{1 - 0,7}} = 1826 \text{ volts},$$

$$E_1 = 1826 \times 0,7 = 1278 \text{ volts},$$

$$I = \frac{1826 - 1278}{100} = 5,48 \text{ ampères}.$$

Remarque. — Nous avons dit que la forme du travail $\mathcal{C}_1$, recueilli dans la portion du circuit à laquelle nous avons donné le nom de résistance utile, importait peu, et que tout travail produit par un courant électrique entraîne la production d'une *f. e. m.* Il en résulte que ces formules conviennent encore lorsque la portion utile du circuit est un fil inerte ne renfermant pas de *f. e. m.* Cette dernière change alors de nom et devient la *d. d. p.* nécessaire pour faire passer le courant I dans la résistance qui le transforme en chaleur. Tout se passe alors comme si le courant produisait d'abord un travail mécanique $E_1 I$ qui serait ensuite transformé en chaleur sur place. On arriverait ainsi par une autre voie à ce que nous avons déjà dit concernant la possibilité de supprimer le mot « résistance d'un conducteur » pour le remplacer par cet autre : « force électromotrice inverse due au passage du courant. »

Digitized by Google

CHAPITRE TROISIÈME

ACTIONS CHIMIQUES DU COURANT ÉLECTRIQUE

---

§ 1. — LOIS DE L'ÉLECTROLYSE ET APPLICATIONS

338. — Généralités. — Les phénomènes calorifiques, produits par le passage d'un courant, sont une conséquence nécessaire de la conservation de l'énergie et de sa transformation finale en chaleur. Mais nous allons maintenant étudier tout un ensemble de faits qu'il était impossible de prévoir à l'aide de ce seul principe et qui constituent une des branches les plus importantes de l'Électricité, branche à laquelle on a donné le nom d'Électrolyse. C'est en 1800, peu de temps après l'invention de la pile par Volta, que deux savants anglais Carlisle et Nickolson, découvrirent que les extrémités des conducteurs qui aboutissaient aux deux pôles d'une pile, étant plongées dans de l'eau acidulée, se couvraient de bulles de gaz ; ils reconnurent facilement que l'un de ces gaz était de l'oxygène qui apparaissait au pôle négatif tandis que l'hydrogène se dégageait au pôle positif. A partir de ce moment, les découvertes se succédèrent rapidement ; et bientôt fut fondée une science nouvelle : l'Electro-chimie, dont Faraday découvrit les principales lois.

339. — Définitions. — On a créé, pour définir les phénomènes de décomposition électro-chimique, un vocabulaire spécial dont voici les termes les plus usités qui sont d'ailleurs tous dus à Faraday. On appelle *électrolyte* tout corps susceptible de décomposition par le

Digitized by Google

passage d'un courant. Les conducteurs ont reçu le nom d'*électrodes ;* le conducteur positif s'appelle *Anode* le conducteur négatif *Cathode*. Les produits de la décomposition ont reçu le nom d'*ions* ; ceux qui se dégagent au pôle positif sont considérés comme étant *électro-négatifs* et sont appelés *Anions*, tandis que les éléments qui apparaissent au pôle négatif sont considérés comme *électro-positifs* et sont désignés sous le nom de *Cathions*.

340. — Lois de l'Électrolyse. — Ces lois sont au nombre de trois.

Première loi. — *L'intensité chimique du courant est la même en tous les points du circuit.*

On appelle intensité chimique d'un courant, un nombre proportionnel au poids de l'électrolyte décomposé dans l'unité de temps.

On démontre cette loi en plaçant, en divers points d'un même circuit, des voltamètres dont le type le plus connu est le *voltamètre à eau*.

Le *voltamètre à eau* (fig. 168) est un appareil composé d'un vase en verre contenant deux petites éprouvettes à gaz dans l'intérieur

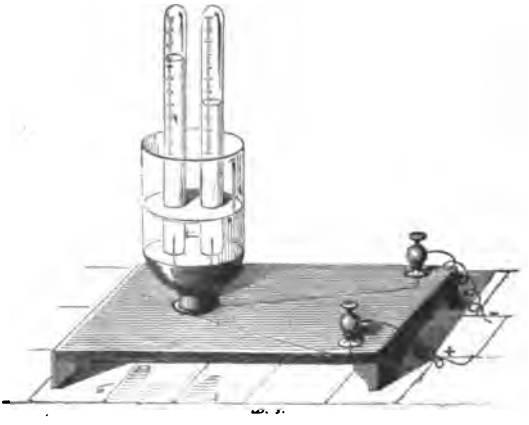

Fig. 168

desquelles pénètrent des fils de platine qui traversent les parois du vase. Ce dernier étant rempli d'eau acidulée ainsi que les éprouvettes, si on met les fils de platine en communication avec les pôles d'une pile, l'eau est décomposée et l'on voit la cloche-éprouvette qui

Digitized by Google

recouvre la lame positive se remplir d'oxygène, tandis que l'hydrogène se dégage dans l'éprouvette qui recouvre la lame négative.

On peut constater en outre, si les cloches sont graduées, que le volume de l'hydrogène est constamment double de celui de l'oxygène. Pour que la décomposition soit suffisamment rapide, il faut que l'eau du voltamètre soit acidulée avec de l'acide sulfurique.

Plusieurs de ces instruments, identiques entre eux, étant placés à la suite l'un de l'autre dans le même circuit, donnent lieu à des dégagements de gaz identiques dans le même temps, ce qui prouve que l'intensité chimique du courant est la même dans tous les points du circuit.

DEUXIÈME LOI. — *Si un courant électrique, après avoir traversé un conducteur, se partage entre plusieurs autres conducteurs, l'intensité chimique dans la branche principale est égale à la somme des intensités chimiques qui existent dans les branches secondaires.*

La figure 169 montre la disposition à laquelle on a recours pour démontrer cette loi. Le courant total traverse d'abord le voltamètre A puis se divise entre deux branches contenant chacune un voltamètre B et B′ ; ces deux branches se réunissent de nouveau en une seule contenant un quatrième voltamètre A′.

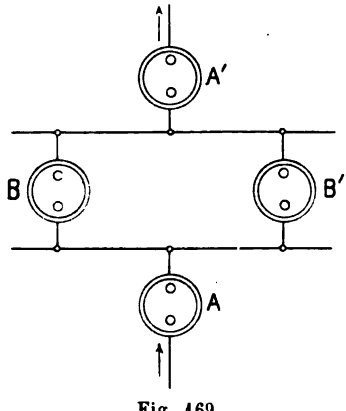

Fig. 169

L'expérience prouve que la somme des quantités de gaz recueillies dans les deux voltamètres B et B′ est égale à la quantité recueil-

Digitized by Google

lie dans A laquelle, en vertu de la loi précédente, est égale à la quantité recueillie dans A'. Il résulte de là, que si on a plusieurs branches égales et parcourues par des courants égaux, les poids d'eau décomposée dans chacune d'elles seront égaux entre eux, et que leur somme sera égale au poids d'eau décomposée dans la branche principale traversée par le courant total avant sa division en plusieurs autres courants.

On conclut de ces deux premières lois que l'*intensité chimique d'un courant est proportionnelle à son intensité électrique*, c'est-à-dire à la quantité d'électricité qui traverse le voltamètre dans l'unité de temps.

Troisième loi. — *Lorsqu'un même courant traverse successivement plusieurs voltamètres contenant, au lieu d'eau acidulée, des dissolutions salines telles que sulfate de cuivre, chlorure d'étain, azotate d'argent*, etc..., *le poids du métal déposé à la cathode de chaque voltamètre est proportionnel à l'équivalent chimique de ce métal.*

En prenant comme exemple les métaux que nous venons d'indiquer au hasard, on trouverait que le poids du métal déposé au bout d'un certain temps dans chaque voltamètre serait représenté par 32 pour le cuivre, par 108 pour l'argent et par 59 pour l'étain, tandis qu'un voltamètre à eau, placé dans le même circuit, dégagerait un poids d'hydrogène représenté par 1.

Cette dernière loi n'est pas absolument générale. Il résulte, en effet, des recherches de Becquerel, que si deux sels différents *d'un même métal* sont parcourus par le même courant, les poids de métal déposés dans les deux voltamètres ne sont pas égaux comme ils devraient l'être d'après cette loi. Ainsi le protochlorure de cuivre CuCl et le bichlorure $CuCl^2$ donnent lieu à des dégagements égaux, *non pas de cuivre, mais de chlore*, c'est-à-dire du métalloïde qui entre dans la combinaison.

L'énoncé de la troisième loi, telle que l'a formulée Faraday, ne serait donc exact que si les sels des différents métaux, soumis à l'action du courant, étaient représentés par des formules chimiques analogues.

Dans le cas contraire, cet énoncé doit être modifié et on doit y

Digitized by Google

remplacer les mots « le poids du métal déposé à la cathode » par ceux-ci : « le poids du métalloïde ou radical acide », c'est-à-dire du corps qui apparaît à l'électrode positive (*anode*).

341. — **Mesure chimique de l'intensité d'un courant. — Unité pratique internationale.** — De nombreuses expériences faites par divers savants parmi lesquels il convient de citer surtout Pouillet et Warren de la Rue, ont établi que l'intensité chimique d'un courant (mesurée par le poids d'un électrolyte décomposé dans l'unité de temps, cet électrolyte étant placé dans des conditions parfaitement déterminées) est proportionnelle à son intensité électrique, telle que nous l'avons définie jusqu'à présent, et qu'elle est également proportionnelle à son intensité électro-magnétique telle que nous la définirons lorsque nous étudierons l'Electro-magnétisme. Il existe par conséquent un rapport constant entre les nombres qui représentent l'intensité d'un courant lorsqu'elle est mesurée : soit par le poids décomposé par unité de temps, d'un électrolyte choisi et placé dans des conditions déterminées ; soit par la quantité d'unités électrostatiques qui traversent le conducteur dans l'unité de temps (seule définition du courant électrique que nous ayons donnée jusqu'à présent) ; soit enfin par l'action mécanique exercée sur un pôle magnétique par ce courant. Or, cette dernière définition est, comme on le sait, celle qui a servi à établir l'unité industrielle (*Ampère*).

On peut donc mesurer le nombre d'*ampères* qui passe dans un conducteur, au moyen de la quantité d'électrolyte décomposé par unité de temps dans un voltamètre traversé par le même courant. Il suffit pour cela de faire, une fois pour toutes, une expérience comparative dans laquelle un courant, mesuré en unités électromagnétiques par des méthodes que nous décrirons plus loin, provoque, dans un voltamètre contenant une solution saline, une action chimique définie par le poids du métal déposé sur la cathode. On obtient ainsi une relation numérique qui permet de conclure l'intensité d'un courant, exprimée en ampères, de son intensité chimique exprimée en grammes de métal déposé par seconde sur la cathode. La facilité avec laquelle on peut se procurer partout, et à l'état de pureté, certains

Digitized by Google

corps facilement décomposables par le courant, la précision que comportent les pesées, la simplicité des dispositions à prendre pour assurer l'exactitude d'une mesure de ce genre, ont décidé l'Administration des Postes et Télégraphes à définir l'ampère légal par son action chimique de la manière suivante :

« L'*ampère légal* est le dixième de l'unité électro-magnétique C. G. S. « de courant. Il est suffisamment représenté, pour les besoins de la « pratique, par le courant invariable qui dépose en une seconde « $0^{gr},001118$ d'argent, dans des conditions déterminées (1) .»

La dissolution saline choisie par la Commission est l'azotate d'argent pur. Si dans le même circuit on intercalait un second voltamètre contenant une solution saline d'un autre métal, du sulfate de cuivre par exemple, la troisième loi de Faraday permettrait de trouver immédiatement le poids de cuivre déposé dans le même temps. L'équivalent de l'argent étant représenté par 108, celui du cuivre par 31,8, le poids de cuivre déposé par seconde serait égal à

$$0^{g},001118 \times \frac{31,8}{108} = 0^{g},0003292.$$

En répétant ce calcul pour les divers métaux qui peuvent être précipités de leurs solutions par voie électrolytique, on peut dresser une table des *équivalents électro-chimiques* de ces métaux. On trouvera ce tableau à la fin du chapitre.

La quantité d'électricité qui traverse, pendant une seconde, un conducteur dans lequel existe un courant d'un ampère, étant par définition, égale à un coulomb, il en résulte que le dépôt de 1 gramme d'argent exige un nombre de coulombs égal au nombre de secondes pendant lequel un courant d'un ampère doit traverser la solution d'azotate d'argent pour précipiter ce poids d'argent. Ce nombre a donc pour valeur

$$\frac{1}{0,001118} = 894,45 \text{ coulombs}$$

(1) Voir à la fin de ce volume..... les instructions pratiques données par la Commission des mesures électriques concernant les moyens à employer pour étalonner avec une précision suffisante les instruments destinés à mesurer des courants, des forces électromotrices ou des résistances.

Digitized by Google

et le nombre de coulombs nécessaires pour déposer un équivalent d'argent ou 108 grammes, est égal à

$$894{,}45 \times 108 = 96\,600 \text{ coulombs.}$$

En vertu de la troisième loi de Faraday, cette quantité d'électricité précipitera également *un équivalent* de n'importe quel métal quel que soit le temps employé.

342. — Voltamètre à gaz. — Nous venons de voir que la mesure du poids d'un métal déposé par voie électrolytique, permet d'évaluer l'intensité d'un courant électrique à la condition que ce dernier soit maintenu constant pendant l'opération. Les solutions salines de cuivre ou d'argent sont certainement celles qui offrent le plus de garanties d'exactitude et le plus de facilité dans l'emploi ; mais, à moins que l'on ne dispose de balances extrêmement sensibles, elles ont l'inconvénient d'exiger que le passage du courant soit prolongé longtemps pour que le poids de métal précipité soit suffisant pour permettre d'effectuer une pesée précise. En outre elles exigent un matériel assez coûteux et chaque opération exige de nombreuses précautions.

Le Voltamètre à gaz permet, au contraire, en raison du grand volume des gaz dégagés, de mesurer avec une approximation suffisante, dans nombre de cas, un courant de faible durée. Cet appareil est identique au Voltamètre à eau (fig. 168). Les cloches étant complètement remplies par le liquide acidulé, si on vient à fermer le courant, la décomposition de l'eau se produit, le volume d'hydrogène dégagé (la température étant supposée égale à zéro et la pression barométrique à 760 millimètres de mercure) est de $6^{cent},933$ par minute ou 416 cent. cubes dans une heure lorsque l'appareil est traversé par 1 ampère. Le volume de l'oxygène étant égal à la moitié de celui de l'hydrogène, on obtient un volume total de *gaz tonnant* égal $10^{c.3},40$ par minute, ce qui dans une cloche de 8 millimètres de diamètre intérieur, ferait descendre le niveau du liquide de près de 21 centimètres par minute. On voit que la mesure d'un courant de 1 ampère correspondrait à celle d'une longueur assez considérable. Mais on peut obtenir une sensibilité bien plus

Digitized by Google

grande en suspendant la cloche qui recueille le mélange après le fléau d'une balance. Le volume de $10^{c.3},4$ de gaz qui apparaît dans la cloche au bout d'une minute, diminue l'effort exercé sur le fléau de la balance d'une quantité égale au poids de $10^{c.3},4$ d'eau c'est-à-dire $10^{gr},4$. On pourrait donc, en appliquant ce principe, construire une sorte d'*ampèremètre chimique* bien plus sensible que les autres appareils basés sur l'emploi de l'électrolyse. Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet qui sera traité avec les détails qu'il comporte dans le chapitre des instruments de mesure.

343. — **Réactions secondaires. — Exceptions apparentes aux lois de l'électrolyse.** — Lorsque les électrodes sont attaquables par les *ions*, les lois que nous venons d'exposer ne se vérifient plus parce qu'il se produit, entre ces électrodes et les produits de la décomposition, une action chimique ou *action secondaire* qui modifie les résultats dûs à l'action électrique seule. Ainsi, lorsqu'on décompose une solution de potasse par le passage d'un courant et que les électrodes sont en platine, l'oxygène se porte à l'anode et le potassium à la cathode, mais, comme ce métal décompose l'eau à froid, il est impossible de l'obtenir par ce procédé parce qu'il se recombine immédiatement avec l'oxygène de l'eau. On ne recueille donc ainsi que de l'oxygène. Si au contraire, la cathode est constituée par du mercure, et que la potasse, au lieu d'être dissoute dans l'eau, forme un bloc solide légèrement humide dans lequel on creuse une cavité contenant le mercure, le potassium au moment où il est mis en liberté, se combine avec le mercure et forme un amalgame d'où on le retire par distillation. C'est encore une action secondaire.

L'électrolyse du sulfate de cuivre au moyen de deux électrodes en cuivre, présente encore un exemple de ce genre d'action. Pendant qu'un équivalent de cuivre se dépose sur la cathode, le radical SO^4 devenu libre se porte sur l'anode avec laquelle il se combine de nouveau pour reformer un équivalent de sulfate de cuivre qui se dissout dans la liqueur. Il n'y a donc en définitive qu'un simple transport de cuivre de l'anode à la cathode.

Digitized by Google

§ 2. — REVERSIBILITÉ DES PHÉNOMÈNES ÉLECTROLYTIQUES. POLARISATION VOLTAIQUE

344. — Définition. — Nous avons vu en électro-statique qu'un condensateur à capacité variable communiquant avec une source d'électricité (qui peut être représentée par un autre condensateur de capacité beaucoup plus considérable), produit un travail mécanique lorsqu'on permet à ses deux armatures de se rapprocher, c'est-à-dire lorsque sa capacité augmente ; et que réciproquement, si après les avoir laissé se rapprocher, on les écarte pour les ramener à leur position primitive, il faut dépenser un travail égal à celui qui avait été fourni pendant le rapprochement. En outre, pendant que l'appareil produit du travail mécanique, il emprunte à la source une certaine quantité d'électricité qu'il lui restitue ensuite pendant l'opération inverse. Cette propriété que possède le condensateur de transformer l'énergie électrique en travail mécanique, ou inversement le travail mécanique en énergie électrique, a reçu le nom de *réversibilité.*

Nous la retrouverons dans un grand nombre de phénomènes électriques. Elle s'étend d'ailleurs à beaucoup d'autres manifestations de l'énergie, et on peut dire que toutes les machines qui ont pour but la production d'un travail mécanique telles que les moteurs hydrauliques, les moteurs à vapeur ou à air chaud, les moteurs à vent, etc..., sont réversibles. Si on leur imprime un mouvement de signe contraire à celui qu'ils prennent sous l'action de la force qui les sollicite, ils transforment en énergie potentielle ou cinétique, le travail mécanique qu'il faut leur fournir pour cela. Ainsi le moteur hydraulique fera monter l'eau du niveau inférieur au niveau supérieur, les moteurs à vapeur et à air chaud transporteront de la chaleur d'un corps froid sur un corps chaud, le moteur à vent créera un courant d'air, etc...

345. — Cette même propriété existe dans les phénomènes d'électrolyse.

Digitized by Google

Pour le prouver, on met en communication avec un galvanomètre les deux fils de platine d'un voltamètre à gaz dans lequel l'oxygène et l'hydrogène sont séparés, et l'on constate un courant qui est de signe contraire à celui qu'il faudrait lancer dans l'instrument pour faire apparaître les gaz oxygène et hydrogène dans les cloches qui leur correspondent. Ce fait est d'ailleurs général, et chaque fois qu'on réunit par un conducteur l'anode et la cathode d'un circuit dans lequel se trouve un électrolyte, après avoir, bien entendu, enlevé la source électro-motrice, on constate l'existence d'un courant de sens inverse à celui qui produisait l'électrolyse. Il n'y a d'exception à cette règle que dans les cas (signalés plus haut) où l'action du courant électrolyseur ne produit qu'un simple transport de métal de l'anode à la cathode, comme cela a lieu avec des électrodes en cuivre plongeant dans une solution de sulfate de cuivre ou des électrodes d'argent dans une solution d'azotate d'argent.

Nous constatons ainsi directement la *f. e. m.* inverse dont nous avons démontré l'existence nécessaire dans toutes les circonstances où le courant électrique produit un travail, de quelque nature que soit ce travail.

346. — Pile à gaz. — Cette propriété des électrolytes a été mise à profit dans toute une catégorie d'appareils qui emmagasinent de l'énergie chimique lorsqu'on y lance un courant électrique, et qui restituent cette énergie sous forme d'énergie électrique dépensée dans un circuit extérieur, lorsqu'on réunit l'anode et la cathode par un conducteur. Ces appareils ont reçu le nom d'accumulateurs. Nous leur consacrerons un chapitre spécial dans le second volume. Actuellement nous nous bornerons à dire quelques mots du plus ancien de tous les accumulateurs : *la pile à gaz* de Grave.

Un couple de cette pile (fig. 170) n'est autre chose qu'un voltamètre à gaz dans les cloches duquel se trouve emmagasinée à l'avance une certaine quantité d'oxygène et d'hydrogène. Ces deux gaz conservent indéfiniment leur volume respectif tant qu'on ne réunit pas les lames de platine par un conducteur extérieur. Mais, dès que cette réunion est effectuée, un courant se produit dans le fil et on voit aussitôt les

Digitized by Google

volumes gazeux diminuer dans les cloches; cette diminution étant deux fois aussi rapide pour l'hydrogène que pour l'oxygène, c'est-à-dire dans les proportions exigées pour reformer l'eau dont la décom-

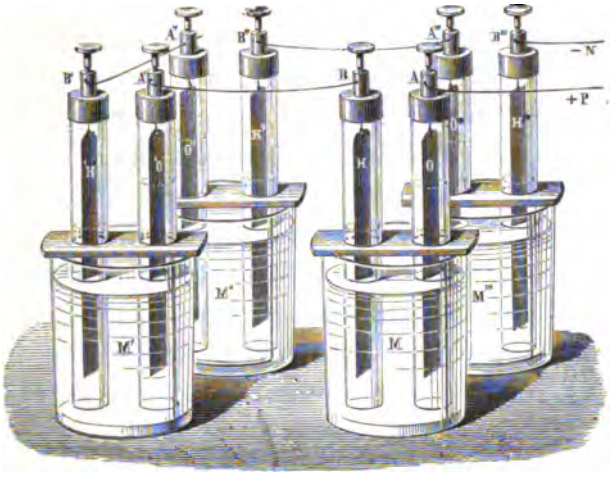

Fig. 170

position leur avait donné naissance. Le pôle positif d'une pile à gaz correspond à l'oxygène et le pôle négatif à l'hydrogène; sa *f. e. m.* est d'environ 1ᵛ.5. Si on réunit par des conducteurs les pôles de même nom de deux de ces appareils, il ne se produit naturellement aucun

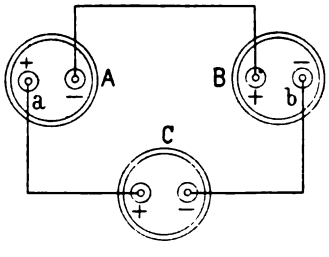

Fig. 171

courant; mais si on en groupe deux A et B en tension (fig. 171), le *f. e. m.* totale de cet ensemble sera double de celle d'un seul couple, et si on ferme le circuit au moyen d'un troisième couple C

Digitized by Google

placé en opposition, c'est-à-dire de façon que le pôle + de C soit réuni au pôle + de A et le pôle — de C au pôle — de B, la somme des *f. e. m.* intercalées dans le circuit sera égale à $2e - e = e$, (e désignant la *f. e. m.* d'un seul couple) et un courant se produira. Il y aura alors décomposition de l'eau dans le voltamètre C et recomposition des gaz dans les voltamètres A et B. Si on mesure le volume des gaz mis en liberté dans C, on le trouve égal à celui qui disparaît dans chacun des voltamètres A et B, ce qui constitue la démonstration la plus générale et la plus élégante que l'on connaisse de la loi de Faraday, concernant l'égalité du travail chimique dans chacun des points d'un circuit électrique.

En général, si on forme deux groupes distincts de couples à gaz dans chacun desquels les voltamètres sont accouplés en tension, si on met ces deux groupes en opposition, comme nous venons de l'expliquer, il se produira un courant dû à l'excès de la *f. e. m.* d'un des groupes sur celle de l'autre groupe, et le volume de gaz disparu pendant un temps donné dans chacun des couples du groupe le plus nombreux, sera égal au volume de gaz qui apparaît dans chacun des couples du groupe le moins nombreux.

347. — Démonstration directe des Lois de la Transmission de l'Énergie au moyen de la pile à gaz. — Supposons qu'on ait groupé un nombre N_0 de couples à gaz en tension, un autre nombre N_1 également en tension, et que l'on mette ces deux groupes en opposition de façon que le second groupe soit parcouru par un courant de sens contraire à celui qu'il tend à produire, ce qui suppose que N_1 est plus petit que N_0.

Désignons par e la *f. e. m.* d'un seul couple, par I l'intensité du courant, par r la résistance intérieure d'un couple et par R celle des conducteurs qui relient le groupe N_0 au groupe N_1, ces deux groupes pouvant d'ailleurs être séparés par une très grande distance.

Le but que nous nous proposons d'atteindre est de produire dans l'unité de temps, à l'extrémité de la ligne que nous pourrions appeler la *station réceptrice*, un certain poids de gaz tonnant, en nous servant pour cela d'une pile à gaz placée à la *station génératrice* qui contient N_0 couples.

Digitized by Google

La *f. e. m.* totale développée par les N_0 couples générateurs est égale à $N_0 e$.

Celle qui est développée par les N_1 couples récepteurs placés en opposition, est égale à $N_1 e$.

La résistance totale du circuit a pour valeur

$$R + (N_0 + N_1) r.$$

Il en résulte que l'intensité du courant a pour expression

$$I = \frac{N_0 e - N_1 e}{R + (N_0 + N_1) r}.$$

Si nous appelons p le poids d'eau *décomposé* dans une seconde par un ampère (0,09316 milligrammes) dans *chaque* couple récepteur et *recomposé* dans *chaque* couple générateur, nous aurons pour le poids P_0 de gaz tonnant consommé par seconde à la station génératrice

$$P_0 = pN_0 I = pe \frac{N_0 (N_0 - N_1)}{R + (N_0 + N_1) r}.$$

Le poids de gaz P_1 récupéré à la station réceptrice aura de même pour expression

$$P_1 = pN_1 I = pe \frac{N_1 (N_0 - N_1)}{R + (N_0 + N_1) r}.$$

Le rendement économique k, c'est-à-dire le rapport de l'énergie récupérée à la station réceptrice à l'énergie dépensée à la station génératrice, sera représenté ici par le rapport des poids de gaz respectivement produits à l'une des stations, dépensées à l'autre. Nous aurons donc

$$k = \frac{P_1}{P_0} = \frac{pN_1 I}{pN_0 I} = \frac{N_1}{N_0},$$

ou, en multipliant les deux termes de cette dernière fraction par e

$$k = \frac{N_1 e}{N_0 e}.$$

Mais $N_1 e$ est précisément la valeur de la *f.e.m* totale de tous les couples montés en série à la station réceptrice ; de même $N_0 e$ représente la *f.e.m* totale E_0 de la pile génératrice. On a donc

$$k = \frac{E_1}{E_0}.$$

Digitized by Google

C'est l'équation du rendement économique d'une transmission d'énergie électrique telle que nous l'avons déjà trouvée (337).

Si le nombre total $N_0 + N_1$ des couples dont on dispose (ce total comprenant ceux de la station génératrice et ceux de la station réceptrice) est constant ainsi que la résistance R de la ligne, la résistance totale du circuit

$$R + (N_0 + N_1)r,$$

est également constante, et le poids P_1 d'eau décomposée dans l'unité de temps à la station réceptrice est le plus grand possible lorsque le produit $N_1(N_0 - N_1)$ est maximum, ce qui a lieu lorsque

$$N_1 = \frac{N_0}{2},$$

c'est-à-dire lorsque la *f.e.m.* inverse E_1 développée à la station réceptrice est égale à la moitié de la *f.e.m.* directe E_0 développée à la station génératrice. Nous avons également déjà trouvé ce résultat.

Enfin si nous multiplions par un même nombre n, le nombre N_0 des couples générateurs, le nombre N_1 des couples récepteurs et la résistance R de la ligne, nous trouverons que l'intensité I du courant ne change pas, mais que les poids P_1 et P_0 des gaz récupérés et des gaz dépensés sont aussi multipliés par n. Ces poids P_0 et P_1 représentant l'énergie chimique dépensée à la station génératrice et l'énergie récupérée à la station réceptrice, on voit que : si on multiplie par un même nombre m la *f.e.m.* totale de la station génératrice, celle de la station réceptrice ainsi que la résistance totale du circuit, on arrive à transmettre une quantité *d'énergie chimique qui est elle-même multipliée par m sans changer le rendement économique*, bien que la résistance de la ligne soit également multipliée par m.

Or, si la ligne est constituée par un fil d'un diamètre constant, il faudra, pour multiplier sa résistance par m, multiplier sa longueur par le même nombre, c'est-à-dire augmenter de plus en plus la distance à laquelle se fait la transmission [1].

(1) C'est en 1881 que nous avons énoncé, pour la première fois, ces lois remarquables de la transmission de l'énergie électrique sous toutes ses formes et que nous avons fait connaître les démonstrations élémentaires qui précèdent. A cette époque, elles paraissaient si paradoxales que, malgré l'extrême simplicité de nos démonstrations (dans lesquelles

Digitized by Google

348.— Application du principe de la Conservation de l'Énergie aux lois de l'Électrolyse. — On pourrait objecter à la démonstration que nous venons de donner qu'elle prouve seulement qu'un certain poids de gaz dépensé dans les appareils générateurs, peut être récupéré dans les appareils récepteurs et qu'il n'y a qu'une seule différence entre ce phénomène et celui que présenterait une conduite servant à transmettre le gaz de la station génératrice à la station réceptrice, c'est que le rendement économique de la conduite serait bien plus élevé. En un mot, il ne semble pas que nos équations se rapportent bien plutôt à une sorte de transmission de matière effectuée par l'intermédiaire d'un fil qu'à une transmission d'énergie. La réponse est facile. Quelle que soit l'origine du courant qui provoque dans les piles réceptrices la production de gaz tonnant, il est certain que ce gaz qui n'existait pas avant l'action du courant, est capable par la recombinaison de ses éléments, de produire une certaine quantité de chaleur, c'est-à-dire d'énergie, proportionnelle à son poids. Or cette énergie, ne pouvant être créée de toute pièce, a été nécessairement engendrée, dans les couples à gaz de la station génératrice, par la combinaison de l'oxygène et de l'hydrogène, combinaison qui se produit dans des conditions inconnues et toutes différentes de celles qui résultent de la combustion violente du mélange gazeux lorsqu'on l'enflamme par un procédé quelconque. Cependant, en vertu du principe de la conservation de l'énergie, la quantité d'énergie développée dans les deux cas est la même. Il suffit donc de connaître la quantité de chaleur produite par la combinaison d'un équivalent d'oxygène avec un équivalent d'hydrogène et de la multiplier par l'équivalent mécanique d'une calorie, pour en conclure l'énergie mécanique totale développée par la formation d'un équi-

---

nous avions évité d'admettre que le travail électrique est défini par le produit EI) basées sur les seules lois expérimentales d'Ohm, de Joule et de Faraday, personne ne voulait les admettre. Il faut lire les journaux techniques de cette époque pour se rendre compte de la violence des attaques dont nos théories furent l'objet. Aujourd'hui elles ne sont plus contestées par personne et les auteurs eux-mêmes, des attaques auxquelles nous faisons allusion, les enseignent comme des banalités classiques et anonymes. Voir à ce sujet les collections de *La Lumière Electrique*, depuis le n° du 2 décembre 1881, où ces démonstrations ont été publiées pour la première fois. Voir aussi, à titre documentaire, la collection des principaux journaux d'électricité, de 1881 à 1887.

Digitized by Google

valent d'eau. L'énergie ainsi produite dans la pile à gaz génératrice se transforme en énergie électrique qui, à son tour, se transforme de nouveau en énergie chimique ou potentielle dans la pile à gaz réceptrice. Le rapport des poids de gaz consommés dans la pile génératrice et récupérés dans la pile réceptrice, représente donc bien le rapport de l'énergie consommée dans le premier cas et récupérée dans le second sous forme d'énergie potentielle, et nous venons de démontrer que la transmission de l'énergie, considérée sous cet aspect, obéit exactement aux mêmes lois que celles que nous avons trouvées en partant de la définition du travail électrique. Nous allons compléter maintenant cette démonstration en supposant que le courant est engendré, non par une pile à gaz, mais par une pile quelconque, dans laquelle la *f.e.m.* est produite par des réactions chimiques autres que la combinaison de l'oxygène et de l'hydrogène.

349. — Détermination théorique de la f.e.m. nécessaire pour produire une décomposition chimique. — Force électro-motrice de polarisation. — Lorsqu'un courant provoque la décomposition d'un électrolyte, la *d.d.p.* nécessaire pour provoquer le passage du courant dans la solution saline se compose de deux parties :

1° Celle qui provient de la résistance de la solution considérée comme simple conducteur, et qni se calcule en appliquant la loi d'Ohm. En la désignant par R, elle a pour valeur RI.

2° La seconde partie est due à la *f.e.m.* développée par l'action chimique et dont nous venons de démontrer l'existence ; en la désignant par E, nous aurons pour déterminer la *d.d.p.* ε nécessaire pour produire la décomposition

$$\varepsilon = E + RI$$

d'où

$$I = \frac{\varepsilon - E}{R}.$$

Ainsi, lorsqu'on diminue de plus en plus la *d.d.p.* ε, il arrive un moment où ε étant égal à E, le courant s'annule et la décomposition s'arrête. La valeur de ε est alors égale à ce qu'on désigne sous le nom

Digitized by Google

de *f.e.m.* de *polarisation*. Nous allons voir comment on peut en déterminer théoriquement la valeur.

En vertu de la conservation de l'énergie, le travail équivalent à la chaleur de combinaison des *ions* est égal au travail nécessaire pour les séparer lorsqu'ils sont combinés. Or, le travail électrique qui produit cette décomposition a pour expression EI pendant l'unité de temps ou EI*t* pendant le temps *t*. Mais I*t* représente la quantité Q d'électricité qui passe pendant le temps *t*. Le travail chimique a donc, quelle que soit la durée de son action, une valeur égale à EQ.

D'autre part, le travail équivalent à la quantité de chaleur produite par la combinaison des *ions*, est égal à AC, A désignant l'équivalent mécanique de la chaleur et C la quantité de chaleur totale développée pendant cette combinaison. L'égalité de ces deux travaux donne

$$EQ = AC \qquad \text{d'où} \qquad E = \frac{AC}{Q}.$$

Pour appliquer cette formule, il faut préciser la quantité de matière soumise à l'électrolyse ; les lois de l'électro-chimie nous indiquent qu'il faut prendre une quantité d'électrolyte représentée par un équivalent. Si nous prenons le gramme pour unité de masse, A représentera le nombre de watts-secondes équivalent à une petite calorie, c'est-à-dire 4,17 ; C sera le nombre de calories produites par la formation d'un équivalent de l'électrolyte considéré, et Q le nombre de coulombs nécessaire pour décomposer ce même équivalent, soit 96 600 (361). La *f. e. m.* E sera alors exprimée en volts et on aura

$$E = 0{,}00004317\,C.$$

EXEMPLES NUMÉRIQUES. — Cherchons la *f. e. m.* minima nécessaire pour décomposer l'eau.

On trouve dans les tables relatives à la thermo-chimie

$$C = 34500.$$

Donc

$$E = 0{,}00004317 \times 34500 = 1^{v},49.$$

Ce nombre s'écarte peu de celui que l'on trouve directement par l'expérience.

Sulfate de Zinc dissous dans l'eau. — La formation d'un équivalent de

Digitized by Google

sulfate de zinc dissous dans 2 litres d'eau produit une quantité de chaleur qui, en partant des éléments primitifs (Zinc, Soufre, Oxygène) pour aboutir à la dissolution aqueuse (Sulfate de Zinc et Eau), a été trouvée égale à 54900 calories.

On en conclut

$$E = 0{,}00004317 \times 54\,900 = 2^{v},37.$$

C'est la valeur théorique de la *f. e. m.* minima qu'il faudrait développer pour décomposer une dissolution de sulfate de zinc avec deux électrodes en platine ; car si les électrodes étaient en zinc, il se produirait des réactions secondaires que nous avons déjà analysées et qui abaisseraient beaucoup la valeur de E.

Sulfate de Cuivre. — La chaleur nécessaire pour former un équivalent de sulfate de cuivre dissous dans deux litres d'eau est égale, lorsqu'on part des éléments primitifs (Cuivre, Soufre, Oxygène), à 30 200 calories.

On en conclut

$$E = 0{,}00004317 \times 30\,200 = 1^{v},30,$$

les électrodes étant bien entendu supposées inattaquables comme dans les exemples précédents.

350. — Calcul de la force électro-motrice d'une pile. — Les exemples numériques ci-dessus vont nous permettre de calculer la *f. e. m.* de la pile Daniell. Elle est, comme on le sait, composée :

1° D'une plaque de cuivre plongeant dans une solution saturée de sulfate de cuivre ;

2° D'une lame de zinc plongeant dans une solution saturée de sulfate de zinc ;

3° D'une cloison poreuse qui sépare les deux liquides et les empêche de se mélanger tout en leur permettant d'entrer en contact, ce qui permet au courant de passer d'une cloison dans l'autre. Lorsque la pile est traversée par un courant allant du zinc au cuivre à l'intérieur de la pile et par conséquent du cuivre au zinc dans le circuit extérieur, le zinc se dissout dans le liquide qui l'entoure en donnant lieu à une *production* de chaleur de 54 900 calories par équivalent dissous, mais en vertu de la troisième loi de Faraday, ce même courant doit provoquer le dépôt d'un équivalent de cuivre sur la lame de cuivre, d'où une *absorption* de chaleur de 30 200 calories. Il y a donc, en définitive, *production* d'une quantité de chaleur égale à 24 700 calories et par conséquent d'une *f. e. m. directe*, c'est-à-dire

Digitized by Google

dans le sens même du courant. Cette *f. e. m.* a évidemment pour valeur la différence des deux *f. e. m.* que nous avons calculées plus haut. Soit

$$2^{v}.37 - 1^{v}.30 = 1^{v}.07.$$

C'est effectivement à peu de chose près ce que l'on trouve par des mesures directes. D'ailleurs il est bon de dire tout de suite que ces calculs ne peuvent conduire à des résultats d'une grande précision à cause de l'incertitude des nombres relatifs aux quantités de chaleur correspondantes aux réactions chimiques multiples, et souvent mal définies, qui s'accomplissent dans les piles électriques. On doit déjà trouver très remarquable l'accord qui existe entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience et le considérer comme une preuve de l'exactitude des principes.

351. — Capacité de polarisation. — Il est intéressant d'étudier ce qui arrive lorsque la *d. d. p.* des deux électrodes inattaquables qui plongent dans un électrolyte est inférieure à la *f. e. m.* de polarisation. On découvre alors dans ces électrodes une propriété très curieuse à laquelle on a donné le nom de *capacité de polarisation* et qui consiste en ceci :

Si on met d'abord les deux électrodes (en platine) en communication avec les deux pôles d'une source d'électricité dont la *f. e. m.* est incapable de produire l'électrolyse, et qu'après un temps très court on rompe la communication, on reconnaît qu'elles se sont chargées d'électricité comme l'auraient fait les deux armatures d'un condensateur et que lorsque la *f. e. m.* de la source est très inférieure à celle qui provoque la décomposition, la charge emmagasinée lui est proportionnelle. Ainsi en admettant que l'eau exige $1^{v},5$ pour être décomposée, si on met les électrodes en communication avec des sources dont les *f. e. m.* sont respectivement égales à $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ de volt ; les quantités d'électricité emmagasinées mesurées au moyen du galvanomètre balistique sont à très peu près proportionnelles aux nombres 1, 2, 3.

Mais à mesure que la *f. e. m.* de la source approche de la valeur

Digitized by Google

nécessaire pour provoquer la décomposition, cette proportionnalité disparaît complètement.

Les lois de la capacité de polarisation ont été étudiées avec soin par M. Blondlot. Il a trouvé que chaque électrode se comporte comme un condensateur dont elle formerait l'une des armatures, l'autre armature étant constituée par l'eau acidulée. L'ensemble des deux électrodes se comporte donc comme le ferait une batterie formée de deux condensateurs montés en série ou en cascade. Nous avons vu (106) que la capacité d'une série de condensateurs dont les capacités individuelles sont représentées par C, C', C'', ... est égale à

$$\frac{1}{\frac{1}{C}+\frac{1}{C'}+\frac{1}{C''}+\cdots}.$$

Dans le cas présent, le nombre de ces condensateurs étant de deux, on a, en appelant C_s la capacité de l'ensemble

$$C_s = \frac{CC'}{C+C'}.$$

Les capacités C et C' étant proportionnelles aux surfaces S et S' des électrodes, peuvent être remplacées par ces dernières de sorte qu'il vient

$$C_s = C_1 \frac{SS'}{S+S'}$$

C_1 représentant la capacité d'une électrode de surface égale à l'unité.

M. Blondlot a trouvé pour C_1 des valeurs variant entre 7,77 micro-farads et 31 micro-farads par *centimètre carré* de surface d'une électrode, suivant la durée de son séjour dans l'eau acidulée, la valeur la plus élevée ayant été obtenue lorsque l'électrode venait d'être chauffée au rouge avant son immersion dans l'eau. Pour se rendre compte de la grandeur de ces nombres, il faut les comparer avec la capacité d'un condensateur ordinaire à lame de mica par exemple. En appelant k le pouvoir inducteur spécifique du mica, on a, pour la capacité exprimée en unités C. G. S. électro-statiques d'un condensateur de surface S dont les armatures sont séparées par une distance δ,

$$C = \frac{kS}{4\pi\delta}$$

Digitized by Google

d'où

$$\delta = \frac{kS}{4\pi C}.$$

Faisons maintenant $S = 1$ centimètre carré, $k = 8$, $\pi = 3{,}1416$; et exprimons C en unités électro-statiques en multipliant le nombre de micro-farads par 900 000 (86) ; nous aurons ainsi pour le nombre le plus faible trouvé par M. Blondlot

$$C = 7.77 \times 900000 = 6\,993\,000.$$

L'écartement δ des deux armatures du condensateur à lame de mica, de même capacité et de même surface qu'une électrode de platine plongée dans l'eau acidulée, a donc pour valeur

$$\delta = \frac{8 \times 1}{12{,}57 \times 6\,993\,000} \text{ centimètres} = \frac{1 \text{ millimètre}}{1\,098\,450}.$$

Si au lieu du nombre le plus faible donné par M. Blondlot, nous adoptions le nombre le plus élevé, nous trouverions pour δ une valeur quatre fois moindre ; et enfin si nous cherchions la distance des armatures d'un condensateur à lame d'air ayant 31 micro-farads par centimètre carré, nous arriverions au chiffre de $\frac{1 \text{ millimètre}}{34\,000\,000}$.

L'attraction mutuelle des deux armatures de ce dernier condensateur serait, en les supposant maintenues à une *d.d.p.* égale à $\frac{1}{100}$ de volt seulement, de 520 kilogrammes par centimètre carré.

Ces nombres montrent bien l'immense puissance des condensateurs électro-chimiques et fait naître tout naturellement l'idée de les substituer aux condensateurs ordinaires. Malheureusement, ils présentent deux inconvénients graves qui ont jusqu'à présent empêché leur usage de se répandre :

1° La petitesse de la différence de potentiel qu'ils peuvent supporter sans cesser de jouer le rôle de condensateur ;

2° La faiblesse de leur isolement qui ne leur permet de rester chargés que pendant peu de temps.

Malgré ces inconvénients nous croyons qu'ils pourront jouer un rôle utile dans certaines applications et c'est ce qui nous a déterminé

Digitized by Google

à nous étendre un peu sur ce sujet. Nous avons supposé dans ce qui précède, que le courant était amené dans le liquide par des électrodes en platine. Mais lorsque les électrodes sont constituées par des tubes remplis de mercure, les phénomènes dûs à la capacité de polarisation ont pour conséquence une modification importante dans la façon dont se manifestent les forces capillaires qui déterminent la forme du ménisque mercuriel. L'étude de ces faits auxquels on a donné le nom de phénomènes électro-capillaires, est intéressante au point de vue théorique ; mais la seule application qui en ait été faite, est un instrument nommé Électromètre capillaire qui a pour but la mesure des différences de potentiel. Nous le décrirons dans le chapitre consacré aux instruments de mesure.

352. — Différentes sources de force électro-motrice. — Le nombre des actions physiques qui sont accompagnées de la production d'une force électro-motrice est considérable. On peut même dire que tous les phénomènes d'ordre mécanique, physique ou chimique, troublent l'équilibre électrique et produisent par conséquent des forces électro-motrices.

Nous citerons dans l'ordre chronologique où on les a découvertes, les actions dues au frottement qui permirent de réaliser les premières machines électro-statiques, le contact de deux métaux différents auquel Volta attribuait la production d'électricité qui se manifeste dans la pile, les actions chimiques, la combustion, les phénomènes capillaires, l'écoulement d'un liquide à travers un corps poreux, l'échauffement d'un métal non homogène, les actions électriques dues à certaines radiations du spectre, etc., etc., et enfin tous les phénomènes d'induction grâce auxquels l'électricité occupe aujourd'hui une place si importante dans les applications de la science à l'industrie.

§ 3. — PHÉNOMÈNES THERMO-ÉLECTRIQUES.

353. — Découverte de Seebeck. — Dans l'énumération que nous venons de faire des phénomènes qui donnent naissance à

Digitized by Google

une *f. e. m.*, nous devons mentionner particulièrement celui qui a été découvert par Seebeck et qui est connu sous le nom de thermo-électricité. Il consiste en ceci :

Si l'on soude en C deux fils de métaux différents AC, BC (fig. 172) dont les extrémités A et B sont réunies par un conducteur dans lequel on intercale un galvanomètre G, et si on chauffe la soudure C, on constate que l'aiguille du galvanomètre est déviée et décèle ainsi l'existence d'un courant. L'échauffement de la soudure a donc provoqué une *f. e. m.* dont on pourrait déterminer la valeur si on connaissait l'intensité du courant et la résistance du circuit.

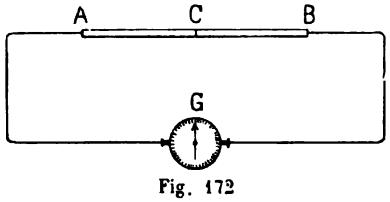

Fig. 172

Il n'est même pas nécessaire que les métaux AC et BC soient différents ni qu'ils soient soudés; deux fils du même métal, pourvu que leur état physique soit différent, donnent naissance à une *f. e. m.* lorsqu'on les met simplement en contact après les avoir chauffés à des températures différentes ou lorsqu'on chauffe leur point de contact.

354. — Lois qui régissent les actions thermo-électriques. — Première Loi. — *La somme algébrique des f. e. m. développées dans un circuit métallique hétérogène, dont tous les points sont à la même température, est nulle.* — Cette loi, due à Volta, est une conséquence des principes de la théorie mécanique de la chaleur; elle signifie que si l'on soude bout à bout un nombre quelconque de tronçons métalliques composés de métaux différents de manière à constituer un circuit fermé et que l'on porte tous les points de ce circuit à la même température, il ne se produira jamais de courant.

Deuxième Loi. — *Si au lieu d'être hétérogène, le circuit est composé d'un métal unique dans toute sa longueur, il ne s'y produit jamais de*

Digitized by Google

courant, même lorsque la section et la température du conducteur varient d'un point à l'autre du circuit.

Troisième Loi. — Soit deux soudures consécutives A et B d'un circuit hétérogène. Supposons que l'on mesure la force électromotrice développée par l'action de la chaleur dans trois expériences différentes définies par le tableau suivant :

	1	2	3
Température de A	t_0	t_1	t_0
Température de B	t_1	t_2	t_2

On constatera que *les forces électro-motrices* e, e' e'', *correspondantes à chacune de ces expériences, sont liées par l'équation*

$$e'' = e + e'$$

à la seule condition que la température t_1 *soit intermédiaire entre* t_0 *et* t_2.

Quatrième Loi. — *Dans un circuit hétérogène où se trouvent deux tronçons* A *et* B *séparés par un nombre quelconque de tronçons intermédiaires maintenus tous à la même température* t, *la f. e. m. est la même que si les deux tronçons* A *et* B *étaient directement en contact et que leur soudure fût maintenue à la même température* t.

355. — Inversion de la force électro-motrice. — Un circuit fermé (fig. 172) étant composé d'au moins deux tronçons formés d'un métal différent, comprend au moins deux soudures; si on chauffe l'une des soudures à une température plus élevée que l'autre, la *f. e. m.* qui prend naissance a un sens qui dépend de la nature des métaux et une intensité qui dépend de la différence des températures des deux soudures. Pour certains métaux, le rapport de la *f. e. m.* à la différence des températures des soudures est constant; le couple qui jouit de cette propriété est dit à *marche uniforme*. Mais cette propriété n'est pas générale et dans la plupart des cas on observe que, l'une des soudures étant maintenue à une température constante, si on élève de plus en plus la température de l'autre soudure, la *f. e. m.* augmente d'abord, puis atteint une valeur maxima à partir de laquelle

Digitized by Google

elle commence à décroître pour devenir nulle lorsque la différence de température des deux soudures est double de celle qui correspond à la *f. e. m.* maxima. A partir de ce moment, si on augmente encore la température de la seconde soudure, la *f. e. m.* change de signe. La température de la seconde soudure, à laquelle se produit ce phénomène, s'appelle *température d'inversion*.

356. — Représentation graphique des lois des phénomènes thermo-électriques. — Les recherches expérimentales de Gaugain sur les couples thermo-électriques lui ont permis de donner une solution générale du problème suivant : *Étant données les températures t_1 et t_2 des deux soudures d'un couple thermo-électrique composé de deux métaux formant un circuit fermé, trouver la f. e. m. développée.*

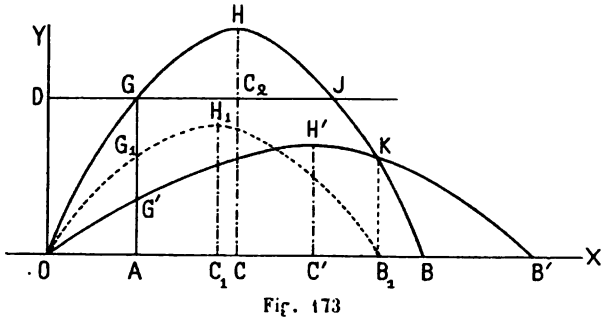

Fig. 173

L'expérience montre que la soudure froide étant maintenue à une température constante t_1, si l'on fait croître la température t_2 de la seconde soudure, la loi qui lie la *f. e. m.* à cette température t_2 est représentée graphiquement par une branche de parabole du deuxième degré OHB (fig. 173), dont l'axe HC est parallèle à l'axe OY des *f. e. m.*

L'ordonnée CH du sommet H de cette parabole, représente la *f. e. m.* maxima correspondante à la température représentée par l'abscisse OC; si on dépasse cette température, la *f. e. m.* diminue et repasse par zéro lorsque la différence de température des deux soudures est double de celle qui correspond au maximum CH de

Digitized by Google

la *f. e. m.* Si on augmente encore la température de la seconde soudure, la *f. e. m.* change de signe; la température représentée par OB est donc celle à laquelle il faut porter la seconde soudure (la première étant toujours maintenue à t_1) pour obtenir l'*inversion*. On voit qu'il résulte des propriétés de la parabole que la différence des températures des deux soudures qui correspond au maximum de *f. e. m.* est double de celle qui produit l'inversion.

La parabole OHB jouit d'une propriété remarquable qui consiste en ce qu'elle représente la *f. e. m.* du couple, non seulement lorsque la température t_1 est constante, la température t_2 étant variable, mais encore lorsque les deux températures t_1 et t_2 varient simultanément. L'expérience prouve en effet que si la soudure froide est portée à une température différente de celle pour laquelle la courbe a été construite, et représentée par exemple par la longueur OA, la courbe qui lie la *f. e. m.* à la température t_2 de la soudure chaude est représentée par la portion de parabole GHJ, les températures étant comptées à partir du point D sur la droite DJ menée parallèlement à OX par le point G dont l'abscisse est OA; tandis que les forces électro-motrices sont mesurées par la distance de chacun des points de cette portion de parabole à la droite DJ. On voit ainsi que lorsque la soudure froide est portée à la température représentée par OA, la *f. e. m.* maxima est représentée par la longueur C_2H et que la température correspondante de la soudure chaude est représentée par DC_2 ou par OC; elle a donc la même valeur que lorsque la soudure froide avait la température primitive pour laquelle la parabole OHB a été construite. On voit ainsi immédiatement que le point d'inversion correspond à une température de la soudure chaude représentée par DJ, c'est-à-dire plus petite que OB qui mesure la température d'inversion dans le premier cas.

Enfin si on donne à la soudure froide une température représentée par l'abscisse OC du sommet H de la parabole, le phénomène de l'inversion disparaît; la *f. e. m.* est constamment négative et va en augmentant de plus en plus en valeur absolue lorsqu'on élève graduellement la température de la soudure chaude.

La température représentée par OC et qui est égale à la moyenne

Digitized by Google

arithmétique de la température de la soudure froide et de celle de la soudure chaude qui détermine l'inversion, est constante pour un couple de deux métaux donnés. Elle correspond à ce qu'on appelle le *point neutre* du couple.

357. — Supposons que l'on ait construit la parabole OHB des *f. e. m.* d'un couple composé de deux métaux M et M', et une seconde parabole OH'B' correspondant à l'association du métal M avec un troisième métal M'' et que l'on demande de construire sans avoir recours à l'expérience la parabole qui représente la *f. e. m.* d'un couple composé des métaux M' et M''. La quatrième loi des actions thermo-électriques permet de résoudre immédiatement ce problème. Elle nous apprend en effet que les *f. e. m.* des trois couples MM', MM'', et M'M'', dont les soudures sont maintenues aux mêmes températures extrêmes t_1 et t_2, satisfont à la relation

$$E_{M'M''} = E_{MM'} - E_{MM''},$$

les symboles $E_{MM'}$ etc... désignant la *f.e.m.* développée par les couples formés par l'association de métaux M, M' etc.....

D'après cette équation, il suffit pour trouver la *f.e.m.* développée par le couple M'M'', lorsque la soudure chaude est portée à une température représentée par OA, de retrancher l'ordonnée AG' qui représente la *f.e.m.* du couple MM'', de l'ordonnée AG qui représente la *f.e.m.* du couple MM'. La différence AG_1 de ces deux ordonnées représente la *f.e.m.* cherchée, G_1 appartenant à la parabole OH_1B_1 qui représente la marche du nouveau couple M'M''.

Il est facile de déterminer le *point d'inversion* B_1 et le point neutre H_1 de ce nouveau couple. En effet, la différence des ordonnées du point d'intersection K des paraboles OHB, OH'B' étant nulle, la *f.e.m.* du couple M'M'' sera nulle en ce point qui a pour abscisse OB_1. Cette abscisse OB_1 représente donc la valeur de la température d'inversion et il résulte de ce que nous avons dit plus haut que le point neutre a pour abscisse $\frac{1}{2}OB_1$ ou OC_1. En élevant en C_1 une ordonnée C_1H_1 égale à la différence des ordonnées des deux paraboles primitives, on obtient le sommet H_1 de la nouvelle parabole qui est ainsi com-

Digitized by Google

plètement déterminée puisqu'on connaît son axe C_1H_1, son sommet H_1 et les deux points O et B_1.

On peut donc, lorsqu'on connaît les paraboles correspondantes à l'association d'un même métal avec un certain nombre d'autres métaux, construire facilement les paraboles relatives à l'association de deux quelconques de ces métaux.

358. — **Représentation analytique des actions thermo-électriques.** — En partant de certaines hypothèses très simples, MM. Tait et Avenarius ont montré qu'on pouvait représenter les résultats de Gaugain par la formule suivante dans laquelle t_1, t_2 et t_0 représentent respectivement la température de la soudure chaude, celle de la soudure froide et la température du point neutre

$$E = k(t_1 - t_2)\left(t_0 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[(t_2 - t_0)^2 - (t_1 - t_0)^2\right].$$

k étant un coefficient numérique. On voit immédiatement que la *f. e. m.* E est nulle lorsqu'on a $t_1 = t_2$, c'est-à-dire lorsque les deux soudures sont à la même température, et aussi lorsque t_2 satisfait à l'équation

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2},$$

qui correspond au cas où t_2 est égal à la température d'inversion.

On a donné le nom de *pouvoir thermo-électrique* au coefficient

$$k\left(t_0 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right),$$

par lequel il faut multiplier la différence $(t_1 - t_2)$ des températures des deux soudures pour obtenir la *f. e. m.* D'autres auteurs appellent ainsi le rapport de la *f. e. m.* à la différence de température des deux soudures lorsque cette dernière est infiniment petite. Cette dernière définition est plus exacte que la première ; elle a pour expression analytique $\frac{dE}{dt_1}$ et représente par conséquent le coefficient d'inclinaison de la tangente menée à la parabole qui représente la *f. e. m.* au point dont l'abscisse est t_1. On voit que le pouvoir thermo-électrique est nul au point neutre et qu'il augmente de plus en plus

Digitized by Google

en valeur absolue en-deçà et au-delà de ce point, tout en ayant des valeurs de signe contraire.

359. — Si les lois que nous venons de faire connaître sont vraies, on voit que la connaissance complète des propriétés d'un couple thermo-électrique dépend seulement de la valeur du coefficient k et de celle de t_0. Aussi s'est-on efforcé de déterminer ces nombres pour des couples formés par l'association d'un métal quelconque avec un autre métal toujours le même et pour lequel on a choisi le plomb. Malheureusement les nombres trouvés par les divers expérimentateurs ne s'accordent pas entre eux ; aussi ne croyons-nous pas nécessaire de les faire connaître. Nous dirons seulement que la *f. e. m.* développée est toujours très petite et que pour obtenir un volt il faut associer en tension beaucoup de couples dont les soudures doivent avoir une différence de température aussi élevée que possible.

360. — **Application des piles thermo-électriques. — Leur valeur comme transformateur d'énergie.** — Les piles thermo-électriques donnent, lorsqu'on les emploie dans des conditions toujours les mêmes, des résultats suffisamment réguliers pour qu'on puisse les utiliser comme étalons pratiques de *f. e. m.* Mais il faut pour cela que les températures des soudures chaudes et froides soient maintenues rigoureusement constantes, les soudures chaudes étant par exemple plongées dans un liquide isolant tel que l'huile lourde de naphte, maintenue à la température de la glace fondante, tandis que la soudure chaude est plongée dans le même liquide, maintenu à la température de l'eau bouillante. La *f. e. m.* d'un seul couple fonctionnant dans ces conditions étant toujours très petite, cette circonstance permet de réaliser avec précision, en groupant en tension un grand nombre de couples, une *f. e. m.* donnée.

Les piles thermo-électriques donnant une *f. e. m.* proportionnelle, dans des limites assez écartées, à la différence de température des soudures, peuvent servir à la mesure des températures. Elles se prêtent d'ailleurs également bien à la mesure des hautes températures

Digitized by Google

employées dans l'industrie métallurgique et à celles des différences de température les plus minimes, à la seule condition d'employer dans la construction des couples, des métaux appropriés au genre d'application auquel on les destine.

Si on examine les piles thermo-électriques en les considérant comme des appareils destinés à transformer l'énergie calorique en énergie électrique, on voit immédiatement qu'elles ne peuvent donner que des résultats extrêmement défavorables.

L'expérience justifie complètement les prévisions théoriques à cet égard. Nous citerons comme exemple une grande pile thermo-électrique de M. Clamond, chauffée au coke. Elle était composée de 3 000 couples et donnait une *f. e. m.* de 109 volts; sa résistance intérieure était de $15^{\omega},5$ et elle consommait 5 kilogrammes de coke par heure. Or, le travail que peut produire, dans un circuit extérieur, une source d'électricité à *f. e. m.* constante, est le plus grand possible lorsque la résistance de ce circuit est égale à la résistance intérieure de la source (334) et il a pour valeur $\frac{E^2}{4R}$, R désignant la résistance extérieure ou intérieure puisqu'elles sont égales, et E la *f. e. m.* La pile en question n'aurait donc pu produire un travail électrique utile supérieur à

$$\frac{109^2}{4 \times 15,5} = 192 \text{ Watts},$$

ou

$$\frac{192}{736} = 0,26,$$

c'est-à-dire à peine $\frac{1}{4}$ de cheval.

La dépense de coke dans cet appareil atteignait donc 20 kilogrammes par heure et par cheval électrique utile ; cette consommation dépasse de beaucoup celle à laquelle donnerait lieu une petite machine dynamo-électrique mise en mouvement par la plus mauvaise des machines à vapeur, dont le poids et le volume seraient d'ailleurs bien inférieurs au poids et au volume de la pile thermo-électrique.

Digitized by Google

TABLEAU DES ÉQUIVALENTS ÉLECTRO-CHIMIQUES

ACTION ÉLECTROLYTIQUE D'UN AMPÈRE

ÉLECTROLYTES	ÉQUIVALENTS	GRAMMES par seconde	VOLUME par seconde centimètres cubes
Argent réduit	108	0,0011173	»
Cuivre	32	0,000329	»
Hydrogène (1)	1	0,00001035	0,11555
Oxygène (1)	8	0,0000828	0,05777
Eau	9	0,0000931	»

(1) Les gaz sont supposés être à la température de 0° et sous la pression de 760 millimètres.

Digitized by Google

Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE

ÉLECTRO-MAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

ACTIONS DES COURANTS SUR LES AIMANTS

§ 1. — DÉCOUVERTE D'OERSTED. — LOI DE BIOT ET SAVART.

361. — Découverte d'Oersted. — Depuis l'invention de la pile électrique faite en 1800 par Volta, les découvertes se succédaient sans interruption dans le domaine de l'électricité ; mais malgré des essais réitérés, personne n'avait pu trouver un lien quelconque entre les phénomènes magnétiques et l'électricité, lorsque en 1819 Oersted remarqua par hasard qu'une boussole, placée dans le voisinage d'un conducteur dont les extrémités aboutissaient aux deux pôles d'une pile, était déviée chaque fois que l'on fermait le courant. Cette découverte établissait l'existence d'une action exercée par le courant électrique sur l'aimant ; elle fut le point de départ d'une série de travaux mémorables qui, grâce à de véritables prodiges de perspicacité, permirent de formuler les lois mathématiques de l'action mécanique exercée par un système magnétique quelconque sur un ensemble de conducteurs traversés par un courant. On peut dire, sans exagération, que la découverte de ces lois fait autant d'honneur à l'esprit humain que celle de l'attraction universelle.

Digitized by Google

362. — Loi de Biot et Savart. — La découverte d'Oersted montrait bien l'action mécanique exercée par l'ensemble d'un circuit fermé sur un aimant, mais elle ne faisait pas connaître les lois de cette action c'est-à-dire l'influence de l'intensité du courant, celle du moment magnétique de l'aimant, et enfin la part afférente à chaque portion du circuit dans l'effet total. C'est à Biot et Savart que l'on doit la formule qui permet de tenir compte de tous ces éléments et qui est par conséquent la formule fondamentale de l'électro-magnétisme. On a essayé dans ces derniers temps de leur enlever cet honneur et quelques auteurs ont donné (mais à tort ainsi que l'a prouvé M. Bertrand dans ses leçons sur la théorie mathématique de l'électricité) à la formule dont nous parlons, le nom de formule de Laplace. Cette appellation n'étant pas justifiée, nous conserverons les noms de Biot et Savart auxquels est due l'expérience fondamentale dont nous allons parler, ainsi que l'expression mathématique qui la représente.

En faisant osciller une petite aiguille aimantée dans le voisinage d'un conducteur rectiligne de longueur assez grande pour qu'on puisse le considérer comme indéfini, Biot et Savart trouvèrent que la force, *supposée appliquée à chacun des pôles*, est perpendiculaire au plan passant par le conducteur et par le pôle considéré et qu'elle est en raison inverse de la distance du conducteur à ce pôle.

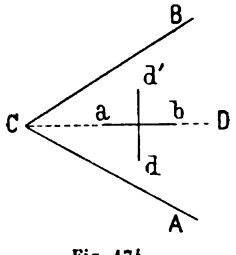

Fig. 174.

Ils recommencèrent alors l'expérience avec un conducteur non plus rectiligne mais anguleux tel que ACB (fig. 174) dans le plan duquel ils placèrent une petite aiguille aimantée *ab* de façon que le courant étant supprimé dans ACB, la direction *ab* coïncidât avec la bissectrice CD de l'angle BCA. L'ensemble étant orienté suivant le méridien magnétique de façon que l'axe *dd'* autour duquel oscille

Digitized by Google

l'aiguille soit vertical, perpendiculaire à CD, et situé dans le plan BCA, on mesure la valeur du couple développé sur l'aiguille par le passage du courant en plaçant successivement son axe dd' (perpendiculaire à CD) à différentes distances du sommet C de l'angle des conducteurs AC, CB. On trouve ainsi que le couple développé sur l'aiguille par le conducteur anguleux ACB, est proportionnel à la tangente trigonométrique de la moitié de l'angle BCD et en raison inverse de la distance du sommet C à l'axe de rotation dd' qui passe par le point neutre de l'aiguille.

C'est cette dernière expérience qui a permis à Biot, grâce à une remarque du physicien Savart, de trouver la formule fondamentale qui représente l'action d'un élément de courant sur un pôle d'aimant [1].

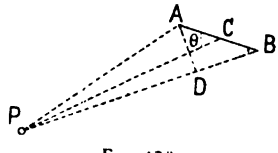

Fig. 175.

En représentant par ds la longueur de l'élément de conducteur AB (fig. 175),

par r la distance PC du pôle P de l'aimant au milieu C du conducteur AB,

par θ l'angle ACP que fait la droite $PC = r$ avec l'élément de conducteur $AB = ds$,

par I l'intensité du courant qui traverse le conducteur AB,

par μ la quantité de magnétisme que contient le pôle P, évaluée en unités magnétiques (200),

et par f_1 un coefficient numérique,

la valeur df de l'effort exercé sur le pôle P par le conducteur AB, est donnée par l'expression

$$df = f_1 \frac{\mu I ds \sin \theta}{r^2},$$

(1) Voir les développements de cette démonstration, ainsi que l'historique des discussions auxquelles elle donna lieu, dans les leçons sur la théorie mathématique de l'électricité par J. Bertrand. Gauthier-Villars, éditeur.

Digitized by Google

et la direction de cet effort est *perpendiculaire* au plan qui passe par le pôle P et par l'élément de conducteur AB, c'est-à-dire au plan de la figure.

363. — Remarque sur la loi de Biot et Savart. — Le pôle P est, par définition, un simple point mathématique et l'élément de conducteur AB a une longueur infiniment petite par rapport à la distance PC, et un diamètre nul. La force qui émane de AB et qui agit sur P, est donc dans les mêmes conditions que les forces gravifiques, électro-statiques et magnétiques que nous avons étudiées dans les deux premières parties de ce volume ainsi d'ailleurs que les forces mises en jeu dans les actions moléculaires. En effet, dans toutes les actions que nous venons d'énumérer, on considère les molécules matérielles comme ayant des dimensions infiniment petites par rapport à la distance qui les sépare. Mais la force électro-magnétique définie par la loi de Biot et Savart se différencie de toutes celles que nous venons de rappeler par une propriété toute nouvelle, qui a provoqué chez les contemporains de ces deux savants un étonnement voisin de l'incrédulité et qui consiste en ce que, tandis que toutes les forces élémentaires agissant entre deux molécules sont dirigées suivant la droite qui les joint, la force électro-magnétique est perpendiculaire à cette même droite. On n'a pas tardé à découvrir la raison de cette apparente dérogation à une règle jusqu'alors sans exception. Dans toutes les actions moléculaires, la force est exercée entre deux molécules existant réellement tandis que dans le cas actuel, le conducteur AB a seul une existence réelle, le pôle P étant une pure abstraction définie par certaines propriétés. Si l'on pouvait calculer l'action exercée par le conducteur AB, non pas sur le point géométrique P, mais sur une molécule de l'aimant, on trouverait qu'elle est dirigée, comme dans tous les autres phénomènes de la nature, suivant la droite qui joint le milieu de AB à cette molécule. On en aura la preuve lorsque nous exposerons les lois des actions exercées par un courant rectiligne sur un conducteur enroulé en hélice.

Si nous observons en outre qu'un aimant a toujours deux pôles égaux et de signe contraire, nous pourrons considérer la loi de Biot

Digitized by Google

et Savart comme ayant pour but de nous faire connaître la valeur de deux forces qui, étant appliquées aux points de l'aimant, auxquels on a donné le nom de pôles, produisent sur cet aimant, considéré comme un corps solide, exactement les mêmes effets que ceux que produisent réellement les forces électro-magnétiques développées entre le conducteur et chacune des molécules. Ces deux forces sont en général inégales et de directions différentes, à moins que les deux plans déterminés par le conducteur d'une part, et chacun des deux pôles d'autre part, ne se confondent. Cette réduction d'un nombre quelconque de forces appliquées aux molécules d'un corps solide, à deux forces non situées dans le même plan et dont on peut choisir arbitrairement les points d'application, est d'ailleurs un fait général comme on le démontre en mécanique.

364. — Nous verrons bientôt que lorsqu'on applique la formule de *Biot et Savart* au calcul des actions mécaniques développées entre un circuit de longueur finie et un aimant matériel, on peut faire disparaître de la formule la quantité de magnétisme μ supposée concentrée à chaque pôle, et la remplacer par le moment magnétique de l'aimant qui a une signification physique parfaitement déterminée et que l'on peut mesurer par les méthodes exposées dans la seconde partie de cet ouvrage. Enfin, on peut aussi introduire les trois dimensions du conducteur que la formule élémentaire suppose filiforme, et on arrive ainsi à une expression rationnelle contenant les dimensions des deux systèmes matériels : le conducteur d'une part, l'aimant d'autre part, entre lesquelles s'exercent réellement les actions mécaniques lorsque le conducteur est, suivant le langage adopté, parcouru par un courant électrique. Nous insistons sur ce point, parce qu'on a laissé s'introduire dans le langage scientifique des expressions qui, ayant d'abord pour but avoué de simplifier et d'abréger le langage, ont amené peu à peu une *confusion* dangereuse de mots et d'idées. C'est-ainsi que l'on dit couramment maintenant « action d'un champ magnétique sur un courant » et que certains auteurs prennent cette expression abrégée au pied de la lettre, tandis qu'elle signifie en réalité : action exercée par un aimant sur un conducteur parcouru

Digitized by Google

par un courant électrique. Car il n'existe pas de champ magnétique sans aimant ou sans *système matériel* équivalent, de même qu'il n'existe pas de courant électrique sans conducteur matériel. En un mot, le principe fondamental de la mécanique rationnelle (égalité de l'action et de la réaction), en vertu duquel tout système de force appliquée à un ensemble de corps émane nécessairement d'un autre ensemble de corps et donne lieu à un second système de forces équivalent au premier, mais de signe contraire, s'applique aux forces électro-magnétiques comme à toutes les forces physiques connues.

Ce principe fondamental étant rappelé une fois pour toutes, nous pouvons, sans inconvénient, employer les locutions usuelles dont nous venons de parler et dire, sous les réserves que nous venons de formuler : action d'un champ magnétique sur un courant, action d'un courant sur un courant, etc., etc.

365. — Autre forme de la formule de Biot et Savart. — On peut donner à la formule de Biot et Savart une forme différente de celle que nous venons de faire connaître, et qui est parfois d'un emploi plus commode. Abaissons du point A (fig. 175), extrémité de l'élément du courant AB, une perpendiculaire AD sur le rayon vecteur PB. Le triangle PAB donne la relation

$$AD = AB \sin ABP.$$

Mais le côté AB et l'angle APB étant infiniment petits, on peut écrire

$$\sin ABP = \sin ACP = \sin \theta,$$

d'où, remplaçant AB par ds,

$$AD = ds . \sin \theta.$$

Mais d'autre part, AD étant perpendiculaire à PB diffère infiniment peu [1] d'un arc de cercle de rayon PA décrit du point P comme centre. Or la longueur de cet arc de cercle a pour valeur

$$AP \times \text{angle } APB = r d\theta.$$

Nous pouvons donc écrire

$$AD = r d\theta,$$

(1) Nous disons que deux infiniment petits diffèrent infiniment peu lorsque leur rapport a pour limite l'unité.

Digitized by Google

ou

$$ds.\sin\theta = rd\theta.$$

La valeur de df devient alors

$$df = f_1 \frac{\mu I r d\theta}{r^2} = f_1 \mu I \frac{d\theta}{r},$$

expression généralement plus facile à intégrer que celle dont nous l'avons déduite.

§ 2. — ACTIONS EXERCÉES PAR UN COURANT SUR UN POLE MAGNÉTIQUE.

366. — Action exercée par un courant rectiligne sur un pôle magnétique. — Soit AB (fig. 176) un courant rectiligne et P un pôle magnétique situé à une distance $PA = a$ du courant.

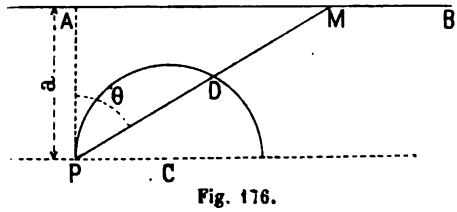

Fig. 176.

Joignons le pôle P à un point quelconque M du conducteur AB. Désignons par θ l'angle APM et par r la longueur PM du rayon vecteur. Le triangle PAM donne

$$a = r\cos\theta,$$

d'où

$$r = \frac{a}{\cos\theta},$$

et par suite

$$\frac{d\theta}{r} = \frac{\cos\theta d\theta}{a}.$$

L'effort df exercé sur un élément de courant compris entre deux rayons vecteurs infiniment voisins, a donc pour valeur

$$df = f_1 \mu I \frac{d\theta}{r} = \frac{f_1 \mu I}{a} \cos\theta d\theta,$$

Digitized by Google

d'où, en intégrant

$$f = \frac{f_1 \mu I}{a} \sin \theta + \text{const.}$$

Si nous supposons que le conducteur commence au point A, pied de la perpendiculaire PA, et s'étende indéfiniment dans la direction AB, il suffira, pour déterminer la constante, de faire $\theta = 0$, on devra alors avoir $f = 0$ ce qui donne zéro pour la constante.

Il est alors facile de représenter graphiquement la valeur de f correspondante à une longueur AM du conducteur. Décrivons en effet une demi-circonférence de rayon quelconque PC tangente au point P à la droite PA, et joignons PM. Le segment PD intercepté entre P et la demi-circonférence, a pour valeur

$$PD = 2PC . \sin \theta,$$

d'où

$$\sin \theta = \frac{PD}{2PC},$$

et par suite

$$f = f_1 \frac{\mu I}{a} \cdot \frac{PD}{2.PC}.$$

La force f exercée sur le pôle P par le conducteur de longueur AM, est donc proportionnelle à la longueur PD.

367. – Action exercée par un courant rectiligne indéfini sur un pôle magnétique. — Si la longueur AM du conducteur augmente indéfiniment, l'angle θ tend vers la valeur $\frac{\pi}{2}$ et la valeur de f devient

$$f = \frac{f_1 \mu I}{a}.$$

Enfin si le courant s'étend également jusqu'à l'infini vers la gauche, la valeur de f est évidemment double de celle que nous venons de trouver, de sorte que l'effort exercé par un courant rectiligne indéfini s'étendant depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, a pour valeur

$$f = f_1 \cdot \frac{2\mu I}{a}.$$

Digitized by Google

368. — Unité électro-magnétique d'intensité de courant. — Cette formule va nous permettre de donner une première définition de l'unité de courant.

Faisons

$$\mu = 1, \qquad I = 1, \qquad a = 1 ;$$

il vient

$$f = 2f_1.$$

Mais f_1 étant un coefficient arbitraire lorsque l'unité de courant est elle-même arbitraire, nous pouvons évidemment le prendre égal à l'unité, du moins tant qu'il ne sera pas démontré expérimentalement que f_1 peut varier suivant certaines circonstances, par exemple avec le milieu interposé entre le conducteur et le pôle P. Nous conviendrons donc de prendre $f_1 = 1$ lorsque le milieu interposé entre le conducteur et le pôle est un gaz ou un liquide ou même un solide non magnétique, en réservant le cas où le milieu interposé est magnétique. Nous verrons d'ailleurs que, même dans cette dernière hypothèse, on peut encore prendre $f_1 = 1$, à la condition de considérer le milieu magnétique interposé comme doué d'une action propre sur le pôle, action qui vient s'ajouter à celle qui est déjà exercée par le courant lui-même.

Nous pouvons donc maintenant définir l'intensité d'un courant par l'action mécanique qu'il exerce sur un pôle magnétique, et dire :

Nous prendrons pour unité, l'intensité du courant qui, traversant un conducteur rectiligne de longueur indéfinie, exerce un effort égal à 2 unités de force sur un pôle magnétique dont l'intensité est égale à 1 et dont la distance au conducteur est égale à l'unité de longueur.

Mais il est évident que cette définition, basée sur des propriétés du courant électrique qui nous étaient inconnues lorsque nous avons cherché à définir numériquement ce phénomène pour la première fois, est extrêmement détournée et qu'elle constitue un système de mesure absolument différent du système électro-statique. Si nous avions voulu conserver l'unité électro-statique d'intensité, nous aurions dû donner à f_1 une valeur égale à celle de l'effort f exercé sur le pôle P par le conducteur indéfini lorsqu'il est traversé, dans l'unité de temps, par l'unité électro-statique de quantité d'électricité.

Digitized by Google

Mais il aurait fallu faire pour cela une expérience extrêmement délicate, sinon impossible à réaliser directement. On a donc préféré créer de toutes pièces un système d'unités auquel on a donné le nom d'unités électro-magnétiques dans lequel on a conservé le centimètre, le gramme et la seconde comme unités de longueur, de masse et de temps, et où l'intensité de courant est, comme nous venons de l'expliquer, définie par la formule de Biot et Savart, dans laquelle on prend $f_1 = 1$.

Cette nouvelle unité d'intensité étant admise, il a fallu déterminer sa valeur numérique par rapport à l'ancienne unité électro-statique ; cette détermination a été l'objet des travaux de beaucoup de savants qui ont d'abord trouvé des nombres présentant entre eux de notables divergences. Mais, à mesure que les méthodes et les instruments de recherche se perfectionnaient, on était amené à constater que le rapport de ces deux unités se rapprochait de plus en plus du nombre 3×10^{10} qui représente la vitesse de la lumière évaluée en centimètres par seconde. Les derniers résultats obtenus séparément par MM. Pellat, Abraham, Hurmuzescu, permettent de considérer ce nombre (3×10^{10}) comme exact, à un millième près de sa propre valeur.

Mais dans la pratique, on a adopté, comme nous l'avons déjà dit à plusieurs reprises, une unité d'intensité dix fois moindre que l'unité électro-magnétique C. G. S. dont nous venons de parler, et qui par conséquent est égale à 3×10^9 unités C. G. S. électro-statiques. On lui a donné le nom d'Ampère. L'unité de quantité d'électricité s'en déduit immédiatement en multipliant l'unité de courant par l'unité de temps exprimée en secondes, c'est-à-dire par 1, puisque la seconde a été conservée comme unité de temps dans le système pratique.

En résumé, il y a actuellement quatre systèmes d'unités électriques, savoir : les unités C. G. S. électro-statiques, les seules que nous ayons employées dans les deux premières parties de cet ouvrage ; les unités électro-magnétiques C. G. S. que nous venons de définir ; les unités électro-dynamiques dont nous parlerons bientôt et qui sont identiques aux unités électro-magnétiques, et enfin les unités

Digitized by Google

dites *pratiques* qui sont des multiples ou des sous-multiples des unités électro-magnétiques.

369. — Action exercée par un courant circulaire sur un pôle magnétique situé en son centre. — Soit P le pôle magnétique situé au centre d'un conducteur (fig. 177) ACBDA affectant la forme d'une circonférence de rayon r. L'arc infiniment petit cc' com-

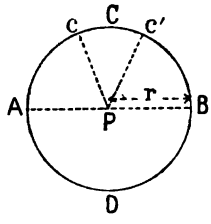

Fig. 177.

pris entre deux rayons infiniment voisins, exerce sur P une action perpendiculaire au plan de la figure et qui a pour expression (365)

$$df = \mu I \frac{d\vartheta}{r}.$$

En intégrant, on trouve immédiatement

$$f = \frac{\mu I \theta}{r},$$

θ désignant l'angle des rayons extrêmes tels que PA et PC entre lesquels est compris le conducteur circulaire AC traversé par le courant. Supposons que cet angle soit égal à une circonférence entière; on a alors $\theta = 2\pi$ et

$$f = \frac{2\pi\mu I}{r}.$$

Si, au lieu d'un seul tour, le conducteur en faisait plusieurs, il suffirait évidemment de multiplier le second membre par le nombre n de circonférences entières, et on aurait

$$f = \frac{2\pi\mu n I}{r}.$$

Pour que cette expression représente rigoureusement la force totale exercée sur P, il faut que les conducteurs qui amènent le courant de-

Digitized by Google

puis la source jusqu'à la circonférence ABCDA, ne produisent aucune action sur P ; il résulte de cette condition que le fil doit décrire un nombre entier de circonférences de façon que le fil d'aller et le fil de retour du courant aboutissent tous deux au point A et cheminent ensuite côte à côte en se confondant pour ainsi dire en un seul conducteur fictif que l'on pourra considérer comme étant parcouru par deux courants égaux et contraires.

370. — **Action exercée par un courant circulaire sur un pôle magnétique situé sur une droite perpendiculaire au plan du cercle et passant par son centre.** — Supposons que le plan du conducteur circulaire soit perpendiculaire au plan de la figure, et soit C et D (fig. 178) les traces de ce conducteur correspondantes aux extrémités d'un même diamètre. Considérons l'élément de courant

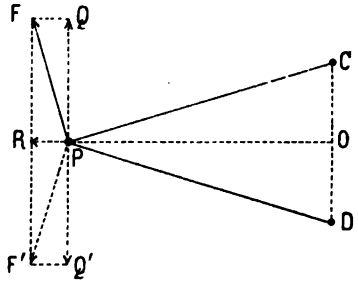

Fig. 178.

infiniment petit situé en C et perpendiculaire au plan de la figure ; il forme avec le pôle P un plan également perpendiculaire à celui de la figure, et par conséquent la force PF, exercée par cet élément sur le pôle P, est d'après la loi de Biot et Savart, perpendiculaire à ce plan ; elle est donc située dans le plan de la figure et perpendiculaire à PC. Sa valeur est donnée par la formule générale

$$PF = \mu I \frac{ds \sin \theta}{\overline{PC}^2}.$$

Mais l'angle θ que fait le rayon vecteur PC avec l'élément de courant projeté en C est un angle droit, donc

$$PF = \mu I \frac{ds}{\overline{PC}^2}.$$

Digitized by Google

La force PF peut être décomposée en deux autres, l'une PQ perpendiculaire à la droite OP (qui joint le pôle P au centre O du courant circulaire) et par conséquent parallèle au plan du courant circulaire. Mais elle est détruite par une autre composante PQ′ égale et contraire qui émane de l'élément D diamétralement opposé à C. Nous n'avons donc pas à nous en occuper.

La seconde composante PR que nous appellerons df, a pour valeur

$$df = \overline{PF} \cos \widehat{FPR} = \overline{PF} \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{PC}},$$

ou, en remplaçant PF par sa valeur

$$df = \mu I ds \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{PC}^3},$$

ou, en désignant par r le rayon $\overline{OC}$ du conducteur circulaire et par a la distance OP du centre de ce conducteur au pôle

$$df = \mu I . ds \cdot \frac{r}{(\sqrt{r^2 + a^2})^3}.$$

L'élément ds étant indépendant de r et de a, cette expression s'intègre immédiatement par rapport à la longueur s de l'arc circulaire formé par le conducteur, et donne

$$f = \mu I \frac{r}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} s.$$

Si, comme dans l'exemple précédent, nous supposons que l'arc s est égal à une circonférence complète ou $2\pi r$, nous aurons

$$f = 2\pi\mu I \frac{r^2}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et enfin si le conducteur fait plusieurs tours, on a, en désignant par n leur nombre

$$f = 2\pi\mu n I \frac{r^2}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si dans ces formules, on fait $a = 0$ c'est-à-dire, si on suppose le pôle P au centre, on retombe sur les formules précédentes.

Digitized by Google

371. — Remarque sur le sens de la force f. — Il est bon de remarquer que dans les deux exemples que nous venons de traiter, le sens de la force f est toujours le même quelle que soit la position du pôle P sur la perpendiculaire OP élevée en O au plan du courant circulaire. Ce pôle peut se déplacer le long de cette droite depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ sans que le sens de la force f en soit affecté. On trouve d'ailleurs ce sens par la règle d'Ampère, en supposant un observateur faisant partie intégrante du conducteur, la face tournée vers le point O et placé de manière que le courant entre par ses pieds et sorte par sa tête ; si le pôle P est un pôle nord, il sera sollicité à se mouvoir de la droite vers la gauche de l'observateur, si c'est un pôle sud, il se mouvra en sens contraire.

Si donc, on pouvait séparer complètement un pôle magnétique du pôle égal et de signe contraire auquel il est toujours uni pour former un aimant, et qu'on le plaçât sur la droite PO à une grande distance du point O, on le verrait se mettre en mouvement vers ce point (en supposant que l'action fût d'abord attractive), traverser le circuit circulaire et s'éloigner ensuite indéfiniment dans le même sens.

372. — **Cas où la distance est très grande par rapport au rayon du conducteur circulaire.** — Reprenons la formule

$$f = 2\pi\mu I \frac{r^2}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et supposons que le rayon r soit très petit par rapport à la distance a du pôle P au centre O du conducteur circulaire. En désignant par s la surface du cercle formé par le conducteur, nous aurons

$$s = \pi r^2,$$

d'où

$$f = \frac{2\mu I s}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\mu I s}{a^3\left(\frac{r^2}{a^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

On voit que lorsque le rapport $\frac{r}{a}$ tend vers zéro, la valeur de f

Digitized by Google

tend vers la limite

$$f = \frac{2\mu Is}{a^3},$$

dont elle diffère extrêmement peu. Ainsi lorsque ce rapport est égal à $\frac{1}{10}$, la valeur rigoureuse diffère à peine de 1,5 °/₀ de la valeur limite.

Or, nous avons vu (221) que l'action exercée par un aimant rectiligne, sur un pôle magnétique situé à une grande distance, sur une droite passant par les deux pôles de l'aimant, a pour expression

$$\frac{2\mathfrak{M}q'}{x^3},$$

$\mathfrak{M}$ désignant le moment magnétique de l'aimant ; q', la quantité de magnétisme du pôle soumis à l'action de l'aimant ; et x la distance du point neutre de l'aimant au pôle mobile. Remplaçant q' par μ et x par a, nous voyons que cette expression présente la plus complète analogie avec celle qui représente l'action du courant circulaire sur le pôle mobile. Pour que ces actions soient égales, il suffit de poser

$$\frac{2\mu Is}{a^3} = \frac{2\mathfrak{M}\mu}{a^3},$$

d'où on tire

$$Is = \mathfrak{M}.$$

373. — Equivalence d'un courant circulaire et d'un feuillet magnétique.— Ainsi donc, si on remplaçait le courant circulaire par un aimant perpendiculaire à son plan et dont le moment magnétique aurait pour valeur le produit Is, l'action exercée sur le pôle P resterait exactement la même. Nous pourrions d'ailleurs imaginer que l'aimant est constitué par deux quantités de magnétisme $+\mu'$, $-\mu'$ réparties sur deux surfaces polaires de section s séparées par un intervalle δ. Le moment magnétique de cet aimant ayant pour mesure le produit $\delta\mu'$ et devant être égal à Is, on a l'équation

$$\delta\mu' = Is,$$

d'où

$$\frac{\mu'}{s}\delta = I.$$

Digitized by Google

Mais $\frac{\mu'}{s}$ est la densité magnétique à la surface polaire de l'aimant, c'est la quantité que nous avons désignée par $\mathfrak{J}$ en parlant des feuillets magnétiques (233) ; on peut donc dire que le courant circulaire est équivalent, dans son action sur le pôle P situé à une grande distance, à un feuillet magnétique satisfaisant à la relation

$$\mathfrak{J}\delta = I,$$

qui devient, en remplaçant le produit $\mathfrak{J}\delta$ par la puissance Φ du feuillet

$$\Phi = I.$$

Remarquons maintenant que si au lieu de supposer, comme nous l'avons fait, que le courant circulaire a un diamètre fini et que la distance a du pôle au centre de ce courant est très grande, nous supposons que le diamètre du conducteur circulaire est infiniment petit, tout ce que nous venons de dire sera rigoureusement exact quelque petite que soit la distance OP, parce que l'exactitude de nos conclusions dépend seulement du rapport $\frac{r}{a}$ et nullement de la grandeur absolue de l'une ou de l'autre de ces quantités. Nous pouvons donc dire qu'un courant circulaire infiniment petit est, dans les conditions que nous venons de définir, rigoureusement équivalent à un feuillet magnétique de même surface dont la puissance serait exprimée par le même nombre que l'intensité du courant. On démontre facilement que le théorème est encore vrai quand le courant, au lieu d'être circulaire, affecte une forme quelconque, pourvu que la surface embrassée soit infiniment petite.

374.— Action exercée par un circuit fermé infiniment petit sur un pôle magnétique situé dans son plan.— Supposons

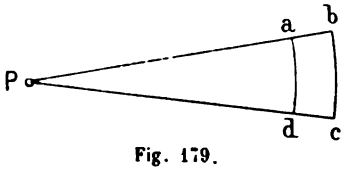

Fig. 179.

maintenant que, au lieu d'être située sur une droite perpendiculaire au plan de circuit circulaire et passant par son centre, le pôle magné-

Digitized by Google

tique soit situé dans le plan même du circuit. Soit P le pôle magnétique (fig. 179), Pb et Pc deux vecteurs infiniment voisins et $abcd$ le circuit fermé infiniment petit qui, au lieu d'être circulaire est composé de deux portions rectilignes ab, dc et de deux arcs de cercle ad, bc décrits du point P comme centre. Les portions rectilignes ab, dc et les arcs curvilignes ad, bc étant infiniment petits, la surface $abcd$ est un infiniment petit du second ordre. Désignons par r le rayon vecteur $Pa = Pd$; par $d\theta$ l'angle infiniment petit $\widehat{aPd}$ des deux vecteurs, et cherchons la valeur des actions exercées par chacun des quatre côtés du quadrilatère $abcd$ sur le pôle P, perpendiculairement au plan de la figure.

Nous pouvons éliminer immédiatement les côtés ab et dc car ils sont situés sur des droites passant par P, et dans ce cas, la formule de Biot et Savart montre que l'action exercée est nulle.

L'action exercée par ad a pour valeur

$$\mu I \frac{\overline{ad} \sin \widehat{Pad}}{\overline{Pa}^2},$$

ou, en remarquant que $\overline{ad} = rd\theta$, que $\overline{Pa} = r$ et que $\sin \widehat{Pad} = 1$,

$$\mu I \frac{rd\theta}{r^2} = \frac{\mu I d\theta}{r}.$$

L'action exercée par le côté bc a pour valeur, en remplaçant Pb par $r + dr$,

$$\frac{\mu I d\theta}{r + dr}.$$

Le courant qui parcourt bc étant de sens contraire à celui qui parcourt ad, ces actions sont aussi de sens contraire, de sorte que l'action résultante développée sur P est égale à

$$\frac{\mu I d\theta}{r} - \frac{\mu I d\theta}{r + dr} = \mu I d\theta \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + dr} \right) = \mu I d\theta \frac{dr}{r(r + dr)},$$

ou, en négligeant dr qui est infiniment petit par rapport à r,

$$\mu I \cdot \frac{d\theta dr}{r^2}.$$

Cette action étant proportionnelle au produit de deux infiniment petits du premier ordre, est un infiniment petit du deuxième ordre ;

Digitized by Google

nous la désignerons donc par d^2f et nous aurons, en la multipliant haut et bas par r

$$d^2f = \mu I \frac{r d\theta dr}{r^3}.$$

Mais

$$r d\theta = \overline{ad},$$

et

$$dr = \overline{ab},$$

donc

$$d^2f = \mu I \frac{\overline{ad} \cdot \overline{ab}}{r^3}.$$

Or, le produit $\overline{ad}.\overline{ab}$ est précisément l'expression de la surface S du quadrilatère *abcd*. Donc enfin

$$d^2f = \mu I \cdot \frac{surface\ \overline{abcd}}{r^3} = \frac{\mu I s}{r^3}.$$

375. — Comparons maintenant cette expression à celle de la force développée par un aimant AB sur un pôle magnétique *b* (fig. 180) situé à une grande distance sur la droite O*b* perpendiculaire à cet aimant et passant par son milieu O. Nous avons déjà fait un calcul

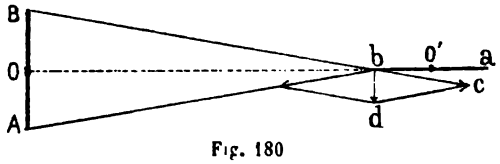

Fig. 180

analogue (274) et nous avons trouvé que l'action totale développée par les deux pôles de l'aimant, est parallèle à celui-ci et que, en désignant par μ la masse magnétique de chacun des pôles de l'aimant ; par 2λ leur distance mutuelle ; par μ' la masse magnétique du pôle isolé *b* ; par $D - \lambda'$ la distance de ce pôle isolé au centre O de l'aimant AB, la force totale dirigée suivant *bd* a pour valeur

$$\frac{2\lambda\mu\mu'}{[\lambda^2 + (D - \lambda')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Si on suppose que l'aimant soit très petit par rapport à sa distance

Digitized by Google

au pôle isolé b, cette expression se simplifie beaucoup et l'on voit immédiatement qu'en désignant par r la distance $D - \lambda'$ du centre O au pôle isolé b et en négligeant la demi-longueur λ de l'aimant devant r, on a

$$\textit{Action totale exercée par } AB \textit{ sur } b = \frac{2\lambda\mu\mu'}{r^3}.$$

Mais $2\lambda\mu$ est le moment magnétique de l'aimant ; en le désignant par $\mathfrak{M}$, en supprimant l'accent de μ' et en représentant par d^2f l'action de AB sur b, il vient

$$d^2f' = \frac{\mathfrak{M}b\mu}{r^3}.$$

D'autre part, la force exercée par le circuit fermé *abcd* est donnée par l'équation

$$d^2f = \frac{\mu I s}{r^3}.$$

Pour que ces deux forces soient égales, il suffit que l'on ait

$$\mathfrak{M}b = Is,$$

ce qui est précisément la condition à laquelle nous sommes déjà arrivés lorsque le plan du circuit est perpendiculaire à la droite qui joint son centre au pôle sur lequel il agit.

Ainsi, dans ces deux cas extrêmes, il y a égalité rigoureuse entre l'action d'un circuit infiniment petit et celle d'un aimant perpendiculaire au plan de ce circuit et dont le moment magnétique aurait pour valeur Is. En outre, on peut, comme nous l'avons fait dans le problème précédent, concevoir cet aimant comme constitué par un feuillet magnétique infiniment petit dont la puissance Φ est mesurée par le même nombre que le courant I. Nous généraliserons bientôt ce théorème qui est de la plus haute importance en l'étendant aux circuits fermés de dimensions finies et orientés d'une façon quelconque par rapport au pôle isolé. Nous démontrerons qu'un circuit fermé peut toujours être remplacé, en ce qui concerne les actions mécaniques qu'il exerce sur des masses magnétiques, par un feuillet magnétique dont la puissance est donnée par l'équation $\Phi = I$.

Digitized by Google

§ 3. — DIMENSIONS DES GRANDEURS ÉLECTRIQUES DANS LE SYSTÈME ÉLECTRO-MAGNÉTIQUE.

376. — Dimensions d'un courant. — La formule de Biot et Savart va nous permettre de déterminer les relations qui existent entre l'intensité d'un courant et les unités fondamentales de longueur, de masse et de temps.

En effet l'expression

$$df = \frac{\mu I\, ds \sin\theta}{r^2}$$

peut s'écrire symboliquement, si on remarque que $\sin\theta$ est un nombre indépendant du choix des unités et si on supprime les notations infinitésimales en remplaçant df par F, ds par L (symbole de la longueur) et r^2 par L^2 (symbole du carré d'une longueur)

$$F = \frac{\mu I}{L},$$

d'où

$$I = \frac{FL}{\mu}.$$

Mais l'expression symbolique d'une force F est (6)

$$F = MLT^{-2},$$

et l'expression d'une masse magnétique est (200)

$$\mu = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}.$$

On en conclut

$$I = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} = F^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi dans le système de mesures électro-magnétiques, l'intensité d'un courant est du même ordre de grandeur que la racine carrée d'une force.

377. — Dimensions des principales grandeurs électriques. — L'ordre de grandeur de l'intensité d'un courant étant connu, on en déduit immédiatement celui de toutes les autres grandeurs élec-

Digitized by Google

triques en se servant des relations qui existent entre elles. On trouve ainsi qu'une quantité d'électricité, ayant pour mesure le produit de l'intensité I d'un courant par le temps T pendant lequel il passe, on a

$$Q = IT = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}.$$

De même, la différence de potentiel de deux points étant, par définition, le travail produit par une quantité d'électricité égale à l'unité lorsqu'elle passe de la première position à la seconde, a pour expression symbolique le quotient d'un travail mécanique par la quantité d'électricité qui a servi à le produire. Or l'expression symbolique d'un travail mécanique est (10)

$$ML^2T^{-2}.$$

En la divisant par celle de la quantité d'électricité, on a

$$\textit{Potentiel} = \frac{ML^2T^{-2}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}.$$

L'expression de la résistance d'un conducteur se déduit immédiatement de la loi d'Ohm qui donne

$$\textit{Résistance} = \frac{\textit{Potentiel}}{\textit{Intensité}}$$

ou toutes réductions faites

$$R = \frac{L}{T}.$$

Le quotient $\frac{L}{T}$ d'une longueur par un temps, représente en mécanique la vitesse d'un mobile; c'est ce qui fait dire par abréviation, que la résistance d'un conducteur est une vitesse.

Nous avons vu (306) que lorsqu'on cherche la valeur du quotient $\frac{\textit{Potentiel}}{\textit{Intensité}}$ en exprimant le numérateur et le dénominateur en unités électro-statiques, on arrive, toutes déductions faites, à trouver qu'il est de la forme $\frac{T}{L}$, c'est-à-dire l'inverse de ce que donnent les unités électro-magnétiques. Il n'y a là rien qui doive surprendre, puisque nous sommes partis d'une définition de l'inten-

Digitized by Google

sité d'un courant absolument différente dans les deux systèmes, et que, ainsi que nous venons de le montrer, la définition de l'intensité d'un courant entraîne celle de toutes les autres grandeurs électriques.

La conclusion à tirer de là, c'est que la résistance d'un conducteur n'est ni une vitesse ni l'inverse d'une vitesse, et que les expériences destinées à démontrer qu'elle est bien réellement, soit une vitesse dans le système électro-magnétique, soit l'inverse d'une vitesse dans le système électro-statique, prouvent simplement qu'elle est tout autre chose que ce qu'on veut en conclure.

On pourrait parfaitement employer par exemple un système d'unités dans lequel l'intensité d'un courant serait définie (en s'appuyant sur les lois de Faraday) par la masse d'un électrolyte décomposé par seconde. L'expression symbolique d'un courant serait alors

$$Intensité = \frac{Masse}{Temps},$$

et on trouverait, en suivant les raisonnements que nous venons d'employer, que la résistance aurait alors pour expression symbolique

$$Résistance = \frac{(Longueur)^2}{Masse \times Temps} = \frac{L^2}{MT},$$

qui n'a aucune analogie avec les deux expressions qui résultent de l'emploi des systèmes électro-statiques ou électro-magnétiques.

Nous venons de trouver qu'il y a équivalence entre un feuillet magnétique de surface infiniment petite et un courant fermé lorsque l'on a

$$I = \Phi$$

ou

$$\frac{I}{\Phi} = 1.$$

Cette relation implique nécessairement la condition que I et Φ sont du même ordre de grandeur; il est bon de le vérifier. Il suffit pour cela, de démontrer que l'expression symbolique de Φ est identique à celle de I que nous avons donnée plus haut.

Or Φ est le produit de la densité magnétique du feuillet par la distance des deux faces, on a donc

$$\Phi = Densité\ magnétique \times Longueur.$$

Digitized by Google

Mais

$$\textit{Densité magnétique} = \frac{\textit{Quantité de magnétisme}}{\textit{Surface}} = \frac{\textit{Quantité de magnétisme}}{\textit{Carré d'une longueur}}.$$

Donc

$$\Phi = \frac{\textit{Quantité de magnétisme}}{\textit{Longueur}}.$$

Renversons maintenant les notations algébriques; nous savons que (200)

$$\textit{Quantité de magnétisme} = M^{\frac{1}{2}}T^{-1}L^{\frac{3}{2}}.$$

Donc

$$\Phi = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1},$$

expression identique à celle de I.

§ 4. — ACTION D'UN COURANT SUR UN AIMANT.

378. — Action d'un courant rectiligne indéfini sur un aimant mobile autour d'un axe perpendiculaire au courant. — Connaissant l'action exercée par un courant sur un pôle magnétique, il est facile d'en déduire l'action exercée sur un aimant qui équivaut, comme nous le savons, à un système de deux pôles égaux et de signe contraire.

Nous avons vu (367) que l'action d'un courant rectiligne indéfini sur un pôle isolé est toujours perpendiculaire au plan passant par le courant et par le pôle et qu'elle a pour valeur

$$f = \frac{2\mu I}{a}.$$

L'action exercée sur un second pôle situé à la distance a', aurait évidemment une valeur égale et de signe contraire, de sorte que si les plans passant par le conducteur et par chacun des pôles ne coïncident pas, l'aimant sera soumis à l'action de deux forces de signe contraire, en général inégales et non situées dans le même plan.

Il est sans intérêt de chercher à résoudre le problème posé dans

Digitized by Google

toute sa généralité, mais il existe des cas particuliers très simples que l'on rencontre très souvent dans l'application. Nous allons les passer rapidement en revue.

Supposons d'abord que l'aimant AB (fig. 181), mobile autour d'un axe vertical (perpendiculaire par conséquent au plan de la figure)

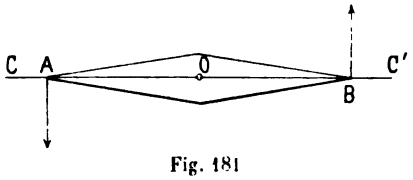

Fig. 181

soit parallèle au courant CC′ supposé horizontal et situé à une distance a de l'aimant.

Soit : $$OA = OB = \lambda,$$

la distance de chacun des pôles A et B au centre magnétique O qui est en même temps le centre de rotation ; μ la masse magnétique de chaque pôle. La force appliquée en A a pour valeur

$$\frac{2\mu I}{a}.$$

Son moment, par rapport au point O, est égal à

$$\frac{2\mu I}{a} \cdot \lambda = \frac{2\lambda\mu I}{a}.$$

Le moment de la force appliquée en B a la même valeur et tend à faire tourner l'aiguille aimantée AB dans le même sens. Le moment total est donc égal à

$$2\lambda\mu \times \frac{2I}{a}.$$

Mais $2\lambda\mu$ étant la valeur du moment magnétique $\mathfrak{M}$ de AB, on voit que l'aiguille est soumise à l'action d'un couple total C qui a pour expression

$$C = \frac{2\mathfrak{M}I}{a}.$$

Il est bon de remarquer d'ailleurs que l'aiguille n'est soumise à aucune autre force car les forces appliquées en A et en B sont per-

Digitized by Google

pendiculaires au plan passant par les deux droites parallèles AB et CC' et sont situées par conséquent dans le plan même de la figure. Elles ne donnent donc lieu à aucune composante verticale et leur action se réduit bien à un couple.

Nous allons montrer maintenant que cette formule est encore vraie même lorsqu'on ne peut pas considérer les masses magnétiques comme concentrées en deux pôles A et B.

Considérons en effet un nombre quelconque de masses magnétiques situées dans la région AO, ayant pour valeur μ_1, μ_2, μ_3, ... et situées à des distances du point O respectivement égales à λ_1, λ_2, λ_3. L'aimant AB étant supposé filiforme et régulièrement aimanté, il existera nécessairement dans la région BO un nombre égal de masses $-\mu_1$, $-\mu_2$, $-\mu_3$ dont les bras de levier seront $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $-\lambda_3$, ...

Les deux masses μ_1 et $-\mu_1$ donneront lieu à un couple

$$c_1 = 2\lambda_1\mu_1 \cdot \frac{2l}{a};$$

les autres masses donneront également lieu à des couples

$$c_2 = 2\lambda_2\mu_2 \cdot \frac{2l}{a},$$

$$c_3 = 2\lambda_3\mu_3 \cdot \frac{2l}{a},$$

et ainsi de suite, de sorte que le couple résultant égal à la somme des couples composants, aura pour valeur

$$C = \frac{2l}{a}\Sigma(2\lambda\mu).$$

$\Sigma(2\lambda\mu)$ représentant la somme de tous les moments magnétiques partiels $2\lambda_1\mu_1$, $2\lambda_2\mu_2$, ..., etc. Mais nous avons vu (210 à 212) que le moment magnétique d'un ensemble d'aimants parallèles est égal à la somme de leurs moments individuels. On a donc

$$\Sigma(2\lambda\mu) = \mathfrak{M}b$$

et on retombe ainsi sur l'équation

$$C = \frac{2l}{a}\mathfrak{M}b,$$

même lorsqu'on ne peut considérer les masses magnétiques comme concentrées à chaque pôle.

Digitized by Google

379. — Action d'un courant rectiligne indéfini sur un aimant mobile autour d'un axe parallèle au courant. — Soit : C (fig. 182) la trace du courant supposé perpendiculaire au plan de la figure ; AB l'aimant réduit à ses deux pôles et supposé perpendiculaire

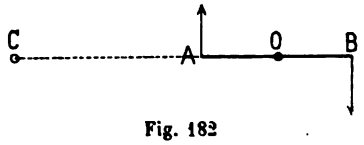

Fig. 182

au courant C ; O l'axe de rotation de l'aimant, passant par son centre magnétique et supposé parallèle au courant. Désignons par a la distance CO, par λ la demi-distance polaire OA = OB de l'aimant, et par $+\mu$ et $-\mu$ la masse magnétique de chaque pôle.

L'effort appliqué en A a pour expression

$$\frac{2\mu I}{a-\lambda}.$$

L'effort appliqué en B

$$-\frac{2\mu I}{a+\lambda}.$$

Le moment de l'effort appliqué en A par rapport au point O, est égal à

$$\frac{2\mu I\lambda}{a-\lambda}.$$

Celui de l'effort appliqué en B, est égal à

$$\frac{2\mu I\lambda}{a+\lambda}.$$

Le moment résultant C est donc égal à

$$\frac{2\mu I\lambda}{a-\lambda}+\frac{2\mu I\lambda}{a+\lambda}=2\lambda\mu I\left(\frac{1}{a-\lambda}+\frac{1}{a+\lambda}\right),$$

on a donc

$$C=2\lambda\mu\frac{2a}{a^2-\lambda^2},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$C=\frac{4\lambda\mu I}{a}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda^2}{a^2}\right)},$$

Digitized by Google

qui diffère très peu de

$$\frac{4\lambda\mu I}{a}$$

lorsque $\frac{\lambda}{a}$ est petit. Ainsi si l'on prend

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{1}{10},$$

on ne commet qu'une erreur relative de $\frac{1}{100}$ en prenant

$$C = \frac{4\lambda\mu I}{a}.$$

Cette même erreur relative tombe à $\frac{1}{400}$ lorsque $\frac{\lambda}{a} = \frac{1}{20}$.

En désignant par $\mathfrak{M}$ le moment magnétique de l'aimant, on voit que la formule simplifiée, admissible lorsque $\frac{\lambda}{a}$ est inférieur à $\frac{1}{15}$, se réduit à

$$C = \frac{2\mathfrak{M}I}{a},$$

comme dans le problème traité dans le numéro précédent, avec cette différence qu'ici la formule n'est qu'approchée. Mais la disposition actuelle permet d'additionner ensemble les efforts produits par une collection d'aimants situés dans le même plan et montés sur le même axe de rotation comme le montre la figure 183 dans laquelle les aimants A_1B_1, B_2B_2, ... sont tous fixés au même axe de rotation

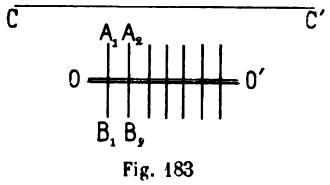

Fig. 183

OO′ parallèle au courant indéfini CC′. Si tous ces aimants sont égaux, le moment de rotation sera proportionnel à leur nombre ; dans le cas contraire il est simplement proportionnel à la somme de leurs moments magnétiques.

Digitized by Google

On peut encore remplacer cette collection d'aimants par un aimant en fer à cheval (fig. 184) dont le plan passe par le courant CC′ et dont le moment magnétique est mesuré par rapport à l'axe OO′ paral-

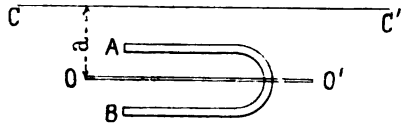

Fig. 184

lèle à ses branches polaires. Nous avons déjà expliqué que dans ce cas, le moment de l'aimant est proportionnel à la quantité de magnétisme qu'il contient parce que toutes les masses magnétiques ont le même bras de levier par rapport à OO′.

Tous ces problèmes trouveront des applications dans les instruments destinés à la mesure de l'intensité des courants.

380. — Action d'un courant circulaire sur un aimant. — En appliquant les raisonnements que nous venons de développer concernant l'action d'un courant rectiligne sur une aiguille aimantée, on trouve facilement (en se servant des expressions de la force développée par un courant circulaire sur un pôle isolé) la valeur du moment total des forces appliquées aux deux pôles d'une aiguille aimantée très petite entourée d'un courant circulaire de rayon r^2.

Nous examinerons deux cas :

Premier cas. — L'axe de rotation de l'aiguille, passant par son centre magnétique et perpendiculaire à la ligne polaire, coïncide avec un diamètre du courant circulaire, et l'aiguille est assez petite pour qu'on puisse négliger la distance de chaque pôle au centre du cercle.

La force appliquée à chaque pôle a pour valeur (369)

$$\frac{2\pi\mu I}{r}.$$

L'aiguille étant située dans le plan même du courant, la force est perpendiculaire à ce plan et, son bras de levier étant égal à λ, son moment a pour valeur

$$\frac{2\pi\mu I\lambda}{r},$$

Digitized by Google

Le moment de la force appliquée à l'autre pôle ayant la même valeur et le même sens, le moment total C est égal à

$$\frac{4\pi\mu I\lambda}{r},$$

d'où, en remplaçant $2\lambda\mu$ par le moment magnétique $\mathcal{M}b$ de l'aiguille

$$C = \frac{2\pi\mu I}{r}.$$

Second cas. — L'aiguille est parallèle au plan du cercle, ainsi que son axe de rotation, mais son centre magnétique est situé à une distance a du centre du courant circulaire sur une droite perpendiculaire au plan de ce cercle et passant par son centre.

On trouve alors

$$C = 2\pi\mathcal{M}bI\frac{r^2}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et si le rapport $\frac{a}{r}$ est très grand, on peut simplifier cette expression qui devient, en désignant par s la surface du cercle embrassé par le courant

$$C = \frac{2\mathcal{M}bIs}{a^3}.$$

Mais ces formules ne doivent être employées, sous peine d'erreurs notables, que si l'aiguille aimantée est très petite par rapport à la longueur de la droite qui joint son centre à un point quelconque de la circonférence du courant circulaire. Lorsque cette condition n'est pas remplie, il faut employer des formules beaucoup plus compliquées et d'un usage peu commode.

381. — Application. — Boussole des tangentes. — Comme application, nous citerons l'instrument de mesure connu sous le nom de *boussole des tangentes*. Cet instrument se compose d'un cadre circulaire de faible épaisseur par rapport à son diamètre, au centre duquel est placée une petite aiguille aimantée suspendue librement à un fil de cocon ; sur le cadre est enroulé un fil conducteur dans lequel on fait passer le courant que l'on veut mesurer (fig. 185).

On oriente le cadre de telle façon qu'il soit dans la direction du

Digitized by Google

champ magnétique terrestre et l'on fait passer le courant ; sous l'action du champ magnétique créé par ce courant, l'aiguille tendra à être déviée et prendra finalement une position d'équilibre en faisant un angle α avec la direction du champ terrestre. Supposons qu'il n'y ait d'abord qu'une spire enroulée sur le cadre.

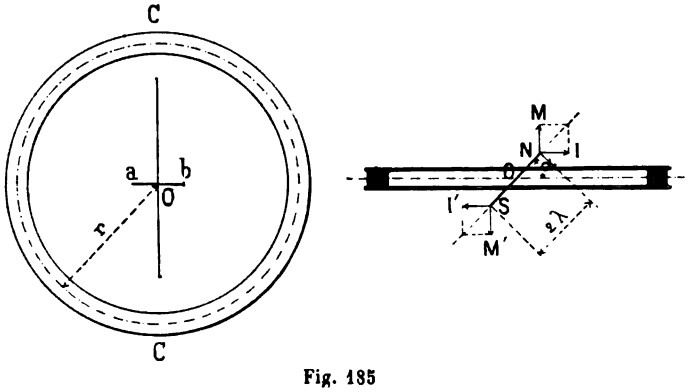

Fig. 185

1° Supposons que l'aiguille est au centre du cadre.

Le couple dû à l'action du courant est alors

$$C = \frac{2\pi \mathfrak{M} I}{r} \cos \alpha ;$$

il fait équilibre au couple dû à l'action du champ magnétique terrestre qui est

$$\mathfrak{M} h \sin \alpha,$$

$\mathfrak{M}$ désignant le moment magnétique de l'aiguille, I le courant à mesurer, r le rayon du cadre, h la composante horizontale du champ magnétique terrestre.

Comme ces couples se font équilibre, on a

$$\frac{2\pi \mathfrak{M} I}{r} \cos \alpha = \mathfrak{M} h \sin \alpha,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi I}{rh}.$$

2° Si l'aiguille, au lieu d'être au centre du cadre, en était située à une distance a, sur la perpendiculaire élevée en ce centre (fig. 186), le cadre restant toujours orienté dans la direction du champ magné-

Digitized by Google

tique terrestre, on aurait, pour le couple dû à l'action du courant :

$$2\pi \mathcal{M} bI \frac{r^2}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \alpha ;$$

pour le couple dû à l'action du champ terrestre

$$\mathcal{M} bh \sin \alpha,$$

d'où en égalant ces deux valeurs

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi I}{\left(\frac{r^2}{r^2+a^2}\right)^{\frac{3}{2}} h}.$$

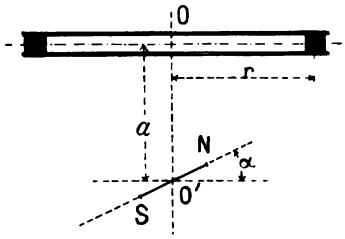

Fig. 186

Connaissant α, par lecture, et par suite $\operatorname{tg} \alpha$, on en déduira la valeur de I, à la condition que l'on connaisse exactement, au lieu où l'on opère, la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre.

Si le cadre contient un certain nombre de spires N, il suffit de remplacer, dans les formules, I par NI.

On peut leur donner une forme plus commode ; soient L, la longueur totale du fil enroulé sur le cadre, N, le nombre de spires, r, le rayon moyen du cadre, on a

$$L = 2\pi N r, \qquad \text{d'où} \qquad r = \frac{L}{2\pi N} ;$$

en remplaçant r et I par leur valeur dans la formule précédente, il vient

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4\pi^2 N^2 I}{Lh},$$

d'où

$$I = \frac{Lh \operatorname{tg} \alpha}{4\pi^2 N^2},$$

Digitized by Google

formule plus facilement applicable, N et L étant plus faciles à mesurer que le rayon moyen r du cadre.

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — Supposons que l'on ait une boussole des tangentes dans laquelle

$$N = 100,$$
$$L = 100^{\text{mètres}} = 10\,000^{\text{cmètres}},$$
$$h = 0{,}2,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 45^\circ = 1,$$

la formule donne

$$I = \frac{10\,000 \times 0{,}2 \times 1}{4 \times \overline{3{,}1416}^2 \times 10\,000}$$

$$I = \frac{1}{197} \text{ d'unité C. G. S.}$$

soit en chiffres ronds

$$I = \frac{1}{20} \text{ d'ampère.}$$

382. — Action d'un courant rectiligne sur un aimant qui ne peut se déplacer que parallèlement à lui-même. — Dans les problèmes précédents nous avons supposé que l'aimant était mobile autour de son centre magnétique et ne pouvait prendre qu'un mouvement de rotation. Examinons maintenant le cas où le seul mouvement que puisse prendre l'aimant est une translation perpendiculaire à la ligne des pôles.

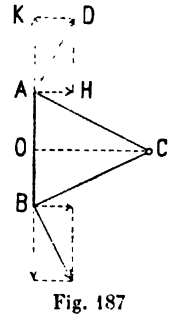

Fig. 187

Soit : A et B (fig. 187) les deux pôles de l'aimant ; C la trace du conducteur supposé perpendiculaire au plan de la figure. Nous admettrons pour plus de simplicité que les deux pôles sont symétri-

Digitized by Google

quement placés par rapport à la perpendiculaire OC abaissée du point C sur AB.

La force exercée par le courant sur A, étant perpendiculaire au plan passant par A et par le courant, est située dans le plan de la figure et elle est perpendiculaire à AC. Supposons qu'elle soit représentée en grandeur et en direction par AD.

Si le conducteur C est très long par rapport à AC, cette force AD a pour mesure, en désignant par μ la masse magnétique de A

$$\textit{force AD} = \frac{2\mu I}{\overline{AC}}.$$

On peut la décomposer en deux autres :

1° Une composante AK dirigée suivant la ligne des pôles et qui, à cause de la symétrie de A et de B par rapport à OC, est détruite par une composante égale et de signe contraire appliquée en B.

2° Une composante AH perpendiculaire à AB et qui a pour valeur

$$\text{AD} \cos \widehat{\text{DAH}} \qquad \text{ou} \qquad \text{AD} \sin \widehat{\text{ACO}}.$$

Mais

$$\sin \widehat{\text{ACO}} = \frac{\text{OA}}{\text{AC}}.$$

Donc

$$\textit{composante AH} = \frac{2\mu I}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{AC}}.$$

ou, en posant $OA = \lambda$, $OC = d$,

$$\textit{composante AH} = \frac{2\lambda\mu I}{\lambda^2 + d^2}.$$

Le second pôle étant, en raison de la symétrie de la figure, soumis à l'action d'une force totale dont la composante, perpendiculaire à AB, est égale à AH et de même signe qu'elle, on voit que la somme des composantes perpendiculaires à AB est égale au double de AH, soit

$$2\,\frac{2\lambda\mu I}{\lambda^2 + d^2} = \frac{2\mathfrak{M}I}{\lambda^2 + d^2},$$

$\mathfrak{M}$ désignant le moment magnétique de AB.

Si l'aimant est guidé de façon à rester parallèle à lui-même et

Digitized by Google

que son centre O se meuve sur une droite OC, il sera sollicité par la force dont nous venons de donner l'expression et que l'on peut considérer comme appliquée au point O. Elle est nulle lorsque OC est très grand, mais elle conserve le même signe lorsque OC varie depuis une valeur quelconque $-d$ jusqu'à $+d$.

383. — Remarque importante. — On voit que dans ce problème, comme dans tous ceux où on calcule l'action d'un courant sur un aimant ou d'un aimant sur un aimant, l'élément auquel nous avons donné le nom de moment magnétique, joue un rôle très important. Cela va nous permettre de remplacer dès à présent, dans tous les problèmes de ce genre, l'aimant idéal réduit à deux pôles par l'aimant réel possédant trois dimensions. En effet, nous avons vu (213) que le moment magnétique d'un aimant est égal au produit de son volume U par un coefficient $\mathfrak{J}$ auquel on a donné le nom d'intensité d'aimantation et qui peut varier depuis zéro jusqu'à une valeur qui dépasse très rarement le nombre 1500. Nous pouvons donc, dans toutes les formules précédentes, substituer au moment magnétique $\mathfrak{M}$, le produit $\mathfrak{J}U$, en tenant compte de la condition que $\mathfrak{J}$ doit toujours être inférieur à 1500. En outre il faut, dans les calculs numériques, ne pas oublier que l'unité d'intensité de courant qui figure dans ces formules est, à moins qu'on ne dise expressément le contraire, l'unité électro-magnétique C.G.S. qui vaut 10 ampères. Il est à peine besoin de rappeler que l'unité de longueur employée est le centimètre et que l'unité de force est le dyne $\left(\frac{1 \text{ gramme}}{981}\right)$.

384. — Attraction exercée sur une tige de fer doux par un courant rectiligne. — Nous avons eu l'occasion de constater l'existence de la force dont nous venons de donner l'expression dans des circonstances intéressantes. On sait que l'industrie électrolytique emploie des courants d'une énorme intensité ; les conducteurs dans lesquels passent ces courants ont donc une section considérable et, par suite, des dimensions transversales que l'on peut se figurer aisément en partant de cette donnée pratique que le courant ne doit pas

Digitized by Google

dépasser notablement 1 ampère par millimètre carré. Par conséquent, pour un courant de 2000 ampères, les conducteurs en cuivre rouge devraient avoir pour section un rectangle de 40 millimètres d'épaisseur sur 50 millimètres de largeur. Mais leur épaisseur apparente dépasse de beaucoup celle que donne le calcul parce que les conducteurs ne sont pas massifs et que, pour favoriser la dispersion de la chaleur qu'ils engendrent continuellement en vertu de la loi de Joule, on les constitue avec des lames de 50 millimètres de largeur et de 2 millimètres d'épaisseur séparées par un intervalle d'environ 3 millimètres dans lequel l'air peut circuler (fig. 188). Ces détails, qui paraissent étrangers au problème qui nous occupe actuellement, ont pour but de faire comprendre comment le phénomène magnétique dont nous allons parler, est resté longtemps inaperçu.

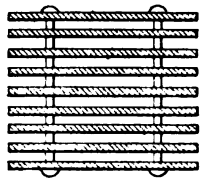

Fig. 188

Nous avions remarqué que, dans une usine électro-métallurgique où les conducteurs avaient la forme que nous venons d'indiquer, on pouvait approcher de ces conducteurs un objet de fer jusqu'au contact sans constater d'effet mécanique appréciable. Mais, ayant eu l'occasion de répéter l'expérience avec un simple fil de $5^{m}/^{m}$ de diamètre plongé dans l'eau pour l'empêcher de fondre sous l'influence de l'énorme quantité de chaleur développée par unité de longueur lorsqu'il était traversé par un courant supérieur à 1000 ampères [1], nous trouvâmes un résultat inattendu et qui, tout d'abord, nous frappa de surprise. Le fil rectiligne de $5^{m}/^{m}$ de diamètre et de 1 mètre de longueur étant

(1) En appliquant la formule démontrée au numéro 331, on trouve que l'élévation de température de ce fil aurait été, pour 1000 ampères, de plus de 670° *par minute*, en supposant, bien entendu, qu'il ne pût se refroidir. Il aurait donc commencé à fondre au bout d'une minute et demie environ.

Digitized by Google

plongé dans une auge en bois pleine d'eau et étant traversé par un courant d'un peu plus de 1000 ampères, nous en approchâmes jusqu'au contact une clef en fer doux faisant avec lui un angle droit. Nous trouvâmes alors qu'elle adhérait après le fil avec une telle force que lorsqu'on la retirait, ce fil, quoique bien tendu, la suivait en prenant la forme d'une ligne brisée. L'attraction ainsi exercée par le fil sur la clef était absolument comparable à celle d'un puissant aimant. La même clef, amenée au contact des conducteurs à grosse section placés dans l'air et traversés par le même courant, ne paraissait pas être soumise à une attraction *appréciable*. D'où provenait cette énorme différence entre les deux effets produits par le même courant ? Uniquement, comme nous allons le montrer, de ce que dans le fil de $5^{m}/^{m}$, le courant était concentré dans un petit espace tandis que, dans les conducteurs aériens, il agissait comme s'il avait été partagé entre un grand nombre de conducteurs égaux dont les actions, dans les régions voisines de la surface, se neutralisaient en grande partie, tandis que dans les régions éloignées, elles étaient très petites en raison même de l'éloignement.

Soit : C et C′ (fig. 189) les traces de deux courants rectilignes indéfinis perpendiculaires au plan de la figure ; μ une masse magnétique

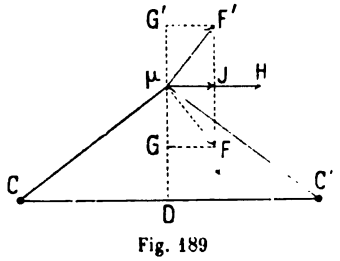

Fig. 189

située sur la perpendiculaire élevée sur CC′ au milieu D de la distance des deux conducteurs. La force totale appliquée à la masse μ par le conducteur rectiligne indéfini C, a pour valeur

$$\frac{2\mu I}{\overline{C\mu}};$$

nous la supposerons dirigée dans le sens μF, c'est-à-dire dans le

Digitized by Google

sens de la rotation des aiguilles d'une montre dont le centre serait en C. Cette force totale $\overline{\mu F}$ peut être considérée comme la résultante de deux autres forces : l'une $\overline{\mu G}$ qui a pour valeur

$$\frac{2\mu I}{\overline{C\mu}} \cdot \cos \widehat{F\mu G} ;$$

l'autre $\overline{\mu J}$ qui est donnée par l'expression

$$\frac{2\mu I}{\overline{C\mu}} \sin \widehat{F\mu G}.$$

La force totale émanée du conducteur C′ parallèle à C et parcouru par un courant égal et de même sens, se décompose aussi en deux autres forces : l'une $\mu G'$ égale et opposée à μG ; l'autre égale à μJ et de même sens qu'elle. Les deux composantes perpendiculaires à CC′ s'annulent donc tandis que les composantes parallèles à CC′ s'ajoutent. La résultante des forces exercées sur μ par les deux conducteurs, se réduit donc à

$$2 \times \frac{2\mu I}{\overline{C\mu}} \sin \widehat{F\mu G},$$

ou, en désignant par x la demi-distance $CD = DC'$ des conducteurs, et par y la distance $\overline{D\mu}$ de la masse magnétique à la droite CC′

$$4\mu I \frac{y}{x^2 + y^2},$$

expression qui s'annule pour $y = 0$ et pour $y = \infty$ et qui passe par un maximum lorsque $x = y$. Dans ce dernier cas, elle a une valeur deux fois moindre que si le courant 2I, somme des deux courants qui traversent C et C′, était entièrement concentré dans un conducteur unique projeté en D. On voit facilement à l'aide de cette formule que la masse μ se déplaçant sur la droite DG′, est soumise à un effort d'autant plus faible qu'elle est plus rapprochée de D, ce qui est exactement le contraire de ce qui arriverait si tout le courant passait dans un conducteur dont le point D représenterait la trace sur le plan de la figure.

385. — Cas où le conducteur a la forme d'une lame de faible épaisseur. — On comprend donc immédiatement que, si au lieu de

Digitized by Google

deux conducteurs symétriques représentés par les points C et C′, il y en avait un nombre quelconque parallèles entre eux et également répartis le long de la droite CDC′, la résultante $\overline{\mu H}$ des actions de tous ces conducteurs serait plus petite que la force appliquée à la masse μ par un courant unique égal à la somme de tous les autres et passant par le point D.

Un calcul simple montre que, si au lieu d'une série de conducteurs distincts, on a une lame rectangulaire *de faible épaisseur*, de largeur CC′ et de longueur indéfinie, perpendiculaire au plan de la figure, l'action de cette lame parcourue par un courant I, sur la masse μ, aura pour valeur

$$\frac{2\mu I}{x} \operatorname{arc\,tg}. \frac{x}{y}.$$

Or, lorsque la distance $\overline{\mu D} = y$, de la masse μ au milieu de la lame rectangulaire servant de conducteur, devient très petite par rapport à la demi-largeur $DC' = x$ de cette lame, la valeur de cette expression diffère très peu de

$$\frac{\pi\mu I}{x},$$

c'est-à-dire est indépendante de la distance μD et inversement proportionnelle à la largeur CC′ de la lame. Si, au contraire, le courant I était entièrement concentré dans le conducteur filiforme projeté en D, l'action exercée sur μ serait égale à

$$\frac{2\mu I}{y}.$$

Ces deux résultats, absolument différents, montrent que l'action d'un conducteur filiforme est bien plus énergique que celle d'un conducteur lamellaire et, *a fortiori*, que celle d'un conducteur dont la section serait par exemple un carré.

On conçoit donc que le fait relaté plus haut et dont nous avons été témoin pour la première fois en août 1893, soit resté ignoré parce qu'il ne pouvait être constaté que sur des conducteurs filiformes traversés par d'énormes courants et par conséquent plongés dans un liquide isolant capable de leur enlever rapidement la chaleur dégagée par le passage du courant.

Digitized by Google

Pour que l'explication soit complète, il nous reste à dire pourquoi un morceau de fer doux est attiré par ce conducteur exactement comme le serait l'aimant de moment magnétique $\mathfrak{M}$ qui figure dans les calculs précédents. La raison en est que, comme nous allons le montrer bientôt, tout conducteur parcouru par un courant, est entouré d'un champ magnétique jouissant exactement des mêmes propriétés que celles dues au champ magnétique d'un aimant. Un corps magnétique placé dans le voisinage d'un courant s'aimante donc par induction comme s'il était placé à proximité d'un aimant. L'intensité de cette aimantation dépend naturellement de celle du courant et des situations respectives du conducteur et du morceau de fer. Lorsque l'intensité du courant est faible ou lorsque sa distance au morceau de fer est grande, l'aimantation induite de ce dernier est faible et le produit $\mathfrak{M}\mathrm{I}$, auquel est proportionnelle l'action mécanique exercée par le courant, décroît beaucoup plus vite que I ou que la distance du courant à l'aimant créé par son influence.

L'infériorité des conducteurs à grande section sur les conducteurs filiformes, est donc encore plus considérable lorsque le corps soumis à leur action est une tige de fer que lorsque c'est un aimant permanent.

386. — EXEMPLE NUMÉRIQUE. — Supposons que le courant qui traverse le conducteur filiforme C (fig. 187), ait une intensité de 1000 ampères, ou 100 unités C. G. S.; que le barreau rectiligne AB ait 10 centimètres de longueur, 1 centimètre carré de section et une intensité d'aimantation égale à 1000 unités. La distance λ étant peu différente des $\frac{4}{5}$ de la demi-longueur de l'aimant, nous aurons $\lambda = 4$. Le moment magnétique $\mathfrak{M}$ aura pour valeur le produit $\mathfrak{M} = 1000 \times 10$. Enfin la distance d du centre du barreau au centre du conducteur, peut être considérée comme égale (au contact) à $0^{cent},75$. La formule du n° 382 nous donne alors pour l'attraction développée au contact du barreau et du conducteur

$$\frac{2\mathfrak{M}\mathrm{I}}{\lambda^2 + d^2} = \frac{2 \times 10000 \times 100}{16 + 0{,}56} \text{ dynes} \quad \text{ou} \quad 122 \text{ grammes.}$$

L'attraction que nous avons constatée était certainement bien plus considérable, mais le barreau employé avait beaucoup plus de 10 centimètres cubes et le courant était supérieur à 1000 ampères. Il ne nous a d'ailleurs été possible de faire aucune mesure numérique.

Digitized by Google

§ 5. — CHAMP MAGNÉTIQUE PRODUIT PAR LES COURANTS.

387. — Intensité du champ magnétique produit par un élément de courant. — Une masse magnétique μ placée dans le voisinage d'un élément de courant, est soumise à un effort qui a pour expression

$$\frac{\mu I ds \sin \theta}{r^2}.$$

Cet effort, perpendiculaire au plan formé par la masse μ et par l'élément ds, pourrait également être produit par une autre masse magnétique μ' qui, d'après la loi de Coulomb, devrait satisfaire à l'équation

$$\frac{\mu I ds \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu \mu'}{r'^2},$$

et serait située à une distance r' de la masse μ sur la perpendiculaire élevée en μ au plan formé par μ et ds.

Nous remplacerions ainsi l'action du courant ds sur la masse magnétique μ, par une autre d'origine purement magnétique et qui lui serait rigoureusement équivalente. Or, l'espace qui entoure un pôle d'aimant étant désigné sous le nom de *champ magnétique*, nous pouvons dire que tout élément de courant est entouré d'un champ magnétique jouissant des mêmes propriétés que celles qui émaneraient d'un pôle magnétique, à la condition que la position de ce pôle magnétique fictif varie avec celle du point de l'espace considéré. Un pôle magnétique isolé étant une fiction irréalisable, il serait préférable de chercher à déterminer la position et le moment magnétique d'un aimant produisant le même effet que l'élément de courant. On trouverait ainsi que l'action de l'élément ds sur le pôle μ peut être remplacée par celle d'un aimant rectiligne perpendiculaire au plan formé par μ et ds, dont le point neutre coïnciderait avec le milieu de ds et dont le moment magnétique varierait proportionnellement à $\sin \theta$.

Mais il est bien plus simple de ne pas se préoccuper de la position

Digitized by Google

ni du moment magnétique d'un aimant destiné à produire sur la masse μ le même effet que celui que produit réellement le courant, et de se borner à définir cette action par sa direction et par l'intensité qu'elle aurait si la masse μ était égale à l'unité ; la force ainsi définie prend, comme nous le savons, le nom d'intensité du champ magnétique au point considéré. Cette intensité h a donc pour valeur, en faisant $\mu = 1$ dans la formule de Biot et Savart

$$h = \frac{I ds \sin \theta}{r^2}.$$

Telle est l'intensité du champ magnétique créé dans l'espace qui entoure un élément de conducteur filiforme ds parcouru par un courant d'intensité I ; la position du point de l'espace considéré étant déterminée par la distance r qui le sépare du milieu de l'élément ds et par l'angle θ que fait cette distance r avec l'élément.

Si, au lieu d'un seul élément de courant, on en considère un nombre quelconque disposés arbitrairement, le champ magnétique de cet ensemble aura évidemment, et par définition, une valeur représentée en grandeur et en direction par la résultante des forces

$$\frac{I_1 ds_1 \sin \theta_1}{r_1^2},$$

$$\frac{I_2 ds_2 \sin \theta_2}{r_2^2},$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots$$

etc.

appliquées, suivant les règles que nous venons d'exposer, par chaque élément, à la masse-unité. La valeur de cette force s'appelle alors le *champ magnétique résultant*.

388. — Digression sur les actions à distance. — Cette substitution de l'action fictive de la portion de l'espace où se trouve la masse-unité, à l'action émanée de l'élément ds, substitution qui est rendue possible par la conception du *champ magnétique*, n'a d'abord été introduite dans la science que comme un procédé commode de calcul permettant de simplifier les formules et surtout de donner une représentation frappante du mode d'action des forces émanées de

Digitized by Google

chaque élément du conducteur. Puis elle est devenue pour beaucoup de savants une réalité concrète en ce sens qu'ils considèrent la force agissant sur la masse-unité comme émanant immédiatement d'un milieu impondérable (éther) dans lequel elle est plongée ainsi que le conducteur. Ce ne serait donc pas *à distance*, c'est-à-dire sans le secours d'aucun agent matériel, que la force agirait entre les deux corps soumis à son action ; elle serait *transmise* de proche en proche par le milieu dont nous venons de parler, depuis le premier corps jusqu'au second et inversement. Cette transmission se ferait généralement en ligne droite mais, en vertu d'actions réciproques qui peuvent prendre naissance entre la matière pondérable et le milieu, elle pourrait aussi, dans certains cas, avoir lieu en ligne courbe.

Nous admettons volontiers l'hypothèse de la transmission de la force par l'intermédiaire d'un milieu qui servirait aussi à transmettre la chaleur et la lumière, nous pensons même que l'on peut *démontrer* l'existence de ce milieu dans le cas où il s'agit de la transmission de la chaleur rayonnante et de toutes les formes de l'énergie, cette démonstration résultant du fait qu'aucune transmission de ce genre n'est instantanée. Nous irons même encore plus loin dans cette voie que la plupart des savants ne l'ont fait jusqu'à présent, car nous croyons que l'on peut formuler l'aphorisme que « toute énergie, quelle que soit sa forme, vient de l'éther et retourne à l'éther, la matière ne servant qu'à modifier la forme sous laquelle se manifeste cette énergie ». Mais nous pensons que dans plusieurs circonstances on a admis sans en donner de preuves suffisantes ou même approximatives que la matière pondérable pouvait altérer *réellement* la direction dans laquelle se transmet la force qui agit entre deux systèmes matériels. Cette déviation n'est, suivant nous, qu'apparente et elle est due à des forces mises en jeu dans la matière pondérable interposée entre les masses agissantes considérées. Ces forces nouvelles, se transmettant également en ligne droite, se composent avec les forces primitives émanées des masses agissantes et donnent ainsi l'illusion d'une déviation.

389. — Champ magnétique d'un courant rectiligne indéfini.

Digitized by Google

— Le champ magnétique étant complètement défini en chaque point de l'espace par la direction et par la grandeur de la force exercée sur une masse magnétique égale à l'unité, située au point considéré, il nous est très facile, en appliquant les formules démontrées précédemment, de trouver immédiatement la direction et l'intensité du champ qui entoure un conducteur électrique. Il suffit pour cela de faire $\mu = 1$ dans les formules qui représentent l'action exercée par ce conducteur sur une masse magnétique égale à μ.

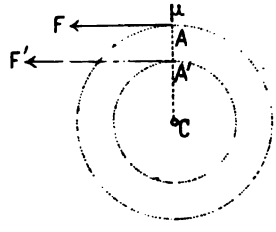

Fig. 190

Considérons d'abord le cas d'un courant filiforme rectiligne, de longueur indéfinie, représenté par sa projection C (fig. 190) ; l'effort exercé par ce courant sur une masse magnétique μ, est appliqué en A et situé dans le plan mené par μ perpendiculairement au courant et il a pour valeur $\frac{2\mu I}{a}$ (378), a désignant la distance de la masse μ au conducteur. Si nous faisons $\mu = 1$, nous aurons pour l'intensité h du champ magnétique

$$h = \frac{2I}{a}.$$

La force, au point considéré, étant perpendiculaire au plan mené par le conducteur C et par μ, est perpendiculaire à la droite Cμ ; elle est donc tangente au cercle décrit du point C comme centre avec Cμ comme rayon. On peut la représenter en grandeur et en direction par la droite AF dont la longueur doit être inversement proportionnelle à celle de CA. Si la masse μ était située à une distance CA' plus petite que CA, la force serait représentée par la longueur F'A' qui devrait satisfaire à la relation

$$F'A' \times A'C = FA \times AC.$$

Digitized by Google

On voit que, en résumé, les lignes de force magnétique d'un conducteur filiforme rectiligne indéfini sont des circonférences situées dans des plans perpendiculaires au conducteur. Une expérience que nous décrirons plus loin met ce fait en évidence d'une manière frappante.

Nous avons dit précédemment que l'on peut déterminer facilement la position et le moment magnétique d'un aimant qui produirait sur la masse-unité la même action que celle due à un élément du courant. Mais cette position et ce moment magnétique changeraient en même temps que la position de la masse μ par rapport à l'élément, de sorte qu'il est impossible de trouver un système magnétique (composé d'aimants dont la direction et l'intensité resteraient invariables) équivalent à un élément de courant pour tous les points de l'espace qui entourent cet élément. Cette remarque s'applique également à un courant rectiligne indéfini. Mais si nous considérons un *circuit fermé*, la question change complètement, et nous avons déjà vu que dans certains cas, un circuit fermé infiniment petit peut être remplacé par un aimant permanent dont la position et le moment magnétique ne dépendent que de l'intensité du courant et nullement de la position de la masse μ sur laquelle cet aimant produit exactement, et dans tous les cas, le même effet que le circuit fermé qu'il remplace.

Nous allons bientôt démontrer que cette propriété remarquable des circuits fermés est absolument générale et qu'elle subsiste même lorsqu'ils ont des dimensions finies, à la condition de substituer un feuillet magnétique à l'aimant simple qui convient dans le cas d'un circuit infiniment petit.

390. — Champ magnétique d'un courant circulaire. — L'effort appliqué à un pôle magnétique de masse μ situé au centre d'un conducteur filiforme circulaire de rayon r, a pour valeur (380)

$$f = \frac{2\pi\mu I}{r}.$$

Faisant $\mu = 1$, nous avons pour l'intensité du champ magnétique

Digitized by Google

au centre

$$h = \frac{2\pi I}{r},$$

à la condition que le conducteur soit filiforme ou que, du moins, ses dimensions dans le sens du rayon et dans le sens perpendiculaire au plan du cercle soient faibles par rapport au rayon r. La direction de la ligne de force qui passe par le centre du cercle est d'ailleurs perpendiculaire au plan de ce cercle.

La détermination de la valeur du champ en d'autres points que le centre, conduit à des formules très compliquées.

391. — Champ magnétique résultant de l'action simultanée de plusieurs conducteurs. — Lorsque plusieurs courants diversement situés agissent simultanément sur une masse magnétique égale à l'unité, *chacun d'eux produit la même action que si les autres n'existaient pas*. C'est là un principe fondamental sur lequel on n'insiste pas assez dans les ouvrages classiques et qui est analogue à celui qui est connu en mécanique rationnelle sous le nom de « Principe de l'indépendance des actions de plusieurs forces simultanées ». Il est d'autant plus nécessaire, suivant nous, de le mettre bien en évidence que, dans d'autres manifestations de forces électro-magnétiques, on attribue aux corps magnétiques tels que le fer, le pouvoir de modifier la grandeur et la direction des lignes de force du champ magnétique qui entoure un conducteur traversé par un courant. Il est parfaitement vrai que la présence d'une masse de fer placée dans le champ magnétique produit par un courant, modifie profondément la grandeur et la direction de la force apparente exercée par ce courant sur une masse-magnétique-unité placée en un point quelconque de l'espace qui entoure le courant. Mais cela tient uniquement, suivant nous, à ce que la masse de fer, se transformant en aimant sous l'influence des lignes de force du champ magnétique créé par le courant, constitue un nouveau système de *masses agissantes* qui exerce, sur la masse-unité, des forces qui se composent avec celles dues au courant seul. On ne constate donc qu'une résultante complètement différente en grandeur et en direction de la force

Digitized by Google

produite par le courant seul. A cette explication si simple et si philosophique, puisqu'elle n'exige aucune hypothèse nouvelle, on en a préféré une autre dans laquelle on attribue au fer la faculté de *conduire* les lignes de forces magnétiques beaucoup mieux que le milieu hypothétique (éther) dont nous parlions précédemment, et on a créé pour désigner cette nouvelle propriété du fer un mot nouveau (la *perméabilité magnétique*) dont nous avons déjà fait connaître la signification mathématique (252).

Nous avons déjà exposé les motifs pour lesquels nous ne croyons pas pouvoir accepter cette manière d'expliquer les phénomènes produits par les corps magnétiques, mais c'est seulement en traitant de l'induction électro-magnétique que nous pourrons faire connaître une expérience qui nous semble décisive à cet égard. Il importe d'ailleurs de bien remarquer que les conclusions et les formules pratiques auxquelles nous arrivons, sont identiques à celles qui sont usuellement adoptées.

Le calcul du champ magnétique résultant d'un système de conducteurs, est beaucoup plus facile lorsqu'on le déduit du potentiel de ce système de conducteurs, que lorsqu'on veut le tirer directement de l'équation de Biot et Savart. C'est donc seulement lorsque nous aurons développé la manière de calculer le potentiel d'un circuit fermé, que nous indiquerons le mode de calcul du champ magnétique d'un système de forme quelconque et que nous l'appliquerons à quelques exemples simples.

392. — Champ magnétique d'un courant circulaire équivalent au champ magnétique terrestre. — Comme application des considérations qui précèdent, proposons-nous de déterminer le diamètre et l'intensité d'un courant circulaire, contenu dans un plan vertical, pour que son champ magnétique annule complètement la composante horizontale du champ magnétique terrestre en un point déterminé ; c'est-à-dire pour que le champ résultant en ce point se réduise à la composante verticale du magnétisme terrestre.

Nous avons vu (370) que l'action exercée par un courant circulaire sur un pôle magnétique situé sur la perpendiculaire au plan de

Digitized by Google

ce courant qui passe par son centre, a pour expression,

$$2\pi\mu I \frac{r^2}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

Si on fait $\mu = 1$, on a la valeur du champ en ce point

$$h = 2\pi I \frac{r^2}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où on tire

$$I = \frac{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi r^2} h.$$

Si on prend par exemple

$$r = 10, \qquad a = 50, \qquad h = 0{,}2,$$

on trouve

$$I = 42{,}2 \text{ unités C. G. S.} \quad \text{ou} \quad 422 \text{ ampères.}$$

Ainsi, un courant traversant un conducteur circulaire de 10 centimètres de rayon, devrait avoir une intensité de 422 ampères pour produire en un point situé à 50 centimètres de distance de son centre, sur la perpendiculaire à son plan passant par ce centre, un champ magnétique égal à la composante horizontale du magnétisme terrestre. Si on voulait réduire l'intensité du courant à 1 ampère, il faudrait que le conducteur fît 422 fois le tour du cercle et qu'il fût assez fin pour que le câble, formé par ces 422 tours, eût un diamètre négligeable par rapport à celui du cercle. Si cette condition n'était pas observée, l'équation qui donne h ne serait plus suffisamment exacte.

Si le point de l'espace où on veut annuler la composante horizontale du magnétisme terrestre était situé au centre même du cercle, on trouverait immédiatement, en faisant dans l'expression ci-dessus $a = 0$, que l'intensité du courant devrait être réduite de 422 ampères à 3,18 c'est-à dire à moins de $\frac{1}{130}$ de la première valeur.

Cet exemple nous montre que le champ magnétique terrestre, malgré sa faible intensité, est équivalent à celui que peuvent produire des bobines parcourues par des courants relativement intenses.

393. — Champ magnétique d'un conducteur tubulaire rectiligne et indéfini. — Soit DBD'B' (fig. 191) la section d'un tube

Digitized by Google

rectiligne indéfini, d'épaisseur très faible par rapport à son rayon et parcouru par un courant de densité uniforme perpendiculaire au plan de la figure.

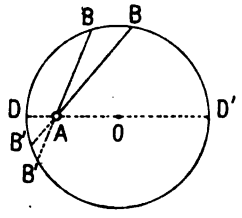

Fig. 191

Soit A un pôle magnétique placé à l'intérieur de ce tube ; la force exercée sur ce pôle par une portion infiniment petite BB de la section du tube, portion qui forme un conducteur rectiligne indéfini, est située dans le plan de la figure et perpendiculaire à la droite qui joint A au milieu de BB. Elle a pour valeur

$$\frac{2\mu I}{\overline{AB}}.$$

Mais le courant I a pour valeur le produit de *la densité i* du courant, par la section BB qui est elle-même égale au produit de l'arc linéaire *ds*, compris entre les deux droites infiniment voisines AB, AB, par l'épaisseur δ de la paroi du tube. On a donc

$$I = i\delta.ds.$$

La force exercée sur μ par BB est donc

$$\frac{2\mu i\delta ds}{\overline{AB}}.$$

On trouverait de même que la force exercée par l'élément B'B' découpé dans la paroi du tube par les droites AB, AB prolongées, est égale à

$$-\frac{2\mu i\delta ds'}{\overline{AB'}}.$$

Elle est, en outre, opposée à la force qui émane de BB puisqu'elle est perpendiculaire à la droite AB' prolongement de AB. Or, les

Digitized by Google

triangles ABB, AB'B' sont semblables comme ayant trois angles égaux chacun à chacun. Donc

$$\frac{ds}{\overline{AB}} = \frac{ds'}{\overline{AB'}}.$$

Donc les forces appliquées en A se font équilibre, et comme ce raisonnement est indépendant de la position de A à l'intérieur du tube, on voit que tous les points intérieurs présentent cette propriété que le champ magnétique résultant y est nul.

On démontre par une méthode analogue que le champ magnétique à l'extérieur du tube est le même que si l'intensité totale du courant qui le traverse était concentrée dans l'axe mathématique du tube qui se projette en O.

On conclut de là que si une aiguille aimantée était placée à l'intérieur du tube, elle ne serait influencée en rien par le passage du courant, quelle que fût son intensité, à la condition que sa densité fût rigoureusement la même dans tous les points de la section.

Digitized by Google

CHAPITRE DEUXIÈME

ACTION DES AIMANTS SUR LES COURANTS

§ 1. — ACTION EXERCÉE PAR UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UN COURANT MOBILE.

394. — Action exercée par un pôle magnétique sur un élément de courant. — Les pôles d'un aimant sont, comme nous l'avons déjà dit, des points dont la définition est purement mathématique et nous avons expliqué comment les actions développées entre un élément de courant et chacune des molécules matérielles d'un aimant, peuvent obéir à la loi fondamentale qui régit toutes les forces de la nature (Action *dirigée suivant la droite qui joint* deux molécules quelconques et accompagnée d'une action égale et contraire), tandis que la résultante de toutes ces actions, supposée appliquée à un pôle, *paraît* obéir à une loi différente. On peut d'ailleurs confirmer l'exactitude de cette manière de voir en calculant directement l'action exercée par un élément de courant sur un solénoïde traversé par un courant.

Les actions élémentaires étant toutes dirigées suivant la droite qui joint deux à deux les molécules de l'élément de courant à celle du solénoïde, on trouve que l'action résultante de toutes ces forces se réduit, en ce qui concerne le solénoïde, à deux forces égales, de signe contraire, parallèles mais non directement opposées. Ce système de force, que l'on appelle un couple, n'a pas de point d'application et *on peut* le considérer comme réalisé par deux forces quelconques remplissant les conditions que nous venons d'énoncer et appliquées

Digitized by Google

en deux points du solénoïde choisis arbitrairement, à la seule condition que le moment de ce couple, c'est-à-dire le produit de l'intensité de chaque force par la distance qui les sépare ait la valeur indiquée par le calcul. Or, en supposant ces forces appliquées aux extrémités du solénoïde, qui jouent ici le rôle des pôles comme nous le verrons bientôt, le calcul montre qu'elles sont perpendiculaires au plan qui joint le centre de figure de l'extrémité considérée à l'élément de courant. On retrouve donc ici le paradoxe apparent de la loi de Biot et Savart.

Cette dernière n'a donc rien d'incompatible avec la loi qui régit toutes les autres forces de la nature, et si elle n'en est réellement qu'un cas particulier, comme tendent à le prouver les considérations qui précèdent, il est facile de démontrer que la force définie par la loi de Biot et Savart doit donner naissance à une force égale parallèle et de signe contraire appliquée à l'élément de courant par le pôle magnétique. — Donc, en employant les notations et les conventions dont nous nous sommes déjà servis, nous pourrons dire que la force exercée par un pôle magnétique sur un élément de courant est perpendiculaire au plan formé par le pôle et par l'élément, qu'elle est de signe contraire à celle qui est appliquée au pôle magnétique et qu'elle a pour expression

$$\frac{I\mu ds \sin\theta}{r^2}.$$

395.—Action exercée par un champ magnétique sur un élément de courant. — L'action exercée par la masse magnétique μ

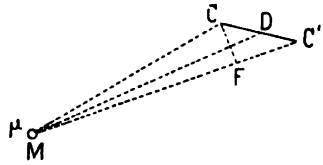

Fig. 192

sur une masse magnétique égale à l'unité qui se trouverait située à l'endroit occupé par l'élément de courant CC' (fig. 192), aurait pour

Digitized by Google

valeur $\frac{\mu}{r^2}$ et elle serait dirigée suivant la droite MD. Cette expression représente donc, par définition, l'intensité du champ magnétique au point D ; en la désignant par h, on voit que la force exercée par le pôle M sur l'élément de courant CC′, a pour valeur

$$f = hIds \sin \theta.$$

On peut la considérer, en vertu des conventions déjà expliquées, comme due à l'action du champ h sur l'élément ds. L'intensité h du champ peut d'ailleurs être considérée comme la résultante de deux forces appliquées simultanément à la masse-unité, l'une dirigée suivant CC′ et qui a pour valeur $h \cos \theta$ (θ désignant l'angle de CC′ avec la droite MD qui joint le pôle M au milieu de CC′) ; l'autre, perpendiculaire à CC′ et qui est égale à $h \sin \theta$. Cette dernière seule entre comme facteur dans l'expression de la force ; en la désignant par h_n, l'expression de la force se simplifie et devient

$$f = h_n Ids,$$

h_n s'appelle la composante *efficace* du champ.

On peut aussi considérer l'expression de la force comme étant le produit de hI par $ds \sin \theta$.

Mais

$$ds \sin \theta = CC' \sin \theta = \overline{CF}.$$

En désignant CF, projection orthogonale de CC′ sur une perpendiculaire à la ligne de force MD du pôle M, par ds_n, on peut écrire la valeur de la force

$$f = hIds_n.$$

Ces deux expressions de la force f sont équivalentes et peuvent être employées indifféremment.

Quant à la direction de f, elle est facile à déterminer puisqu'elle est parallèle à la force appliquée au pôle M par le courant CC′, mais de signe contraire. Elle est donc perpendiculaire au plan de la figure et par conséquent aussi à la ligne de force MD du champ magnétique. — Donc, la force exercée par un champ magnétique sur un élément de courant est perpendiculaire au plan formé par cet élément de courant et par la ligne de force du champ qui passe par le milieu de l'élément.

Digitized by Google

L'intensité de la force étant proportionnelle à $\sin\theta$, est nulle lorsque l'élément de courant est dirigé suivant cette ligne de force.

396. — Action exercée par un champ magnétique uniforme sur un courant rectiligne. — Soit AB (fig. 193) un conducteur rectiligne de longueur l parcouru par un courant d'intensité I et plongé dans un champ magnétique uniforme d'intensité h dont les lignes de force hh, hh, font avec AB un angle θ. La formule démontrée dans le numéro précédent pour un élément infiniment petit ds

$$f = hIds \cdot \sin\theta,$$

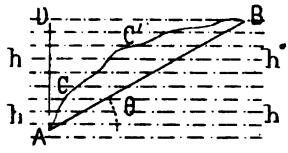

Fig. 193

dans laquelle on suppose h et θ constants, donne immédiatement en remplaçant ds par dl et en intégrant

$$f = hIl \sin\theta.$$

Cette force f est perpendiculaire au plan mené par AB parallèlement aux lignes de force du champ, c'est-à-dire perpendiculaire au plan de la figure.

On peut simplifier cette expression en remplaçant $l\sin\theta$ par sa projection AD sur une droite perpendiculaire aux lignes de force et en posant $AD = l_n$ on trouve,

$$f = hIl_n.$$

Cette seconde forme a l'avantage de s'appliquer à un circuit curviligne tel que ACC'B dont les extrémités A et B coïncident avec celles du circuit rectiligne, parce que la projection totale des deux circuits sur une perpendiculaire aux lignes de force est la même.

397. — Action exercée par un champ magnétique uniforme sur un courant fermé. — On voit immédiatement qu'un cou-

Digitized by Google

rant fermé ACBDA (fig. 194) dont le plan est parallèle aux lignes de force du champ, sera sollicité par des forces qui seront toutes dirigées dans le même sens dans la région ACB comprise entre les deux tangentes extrêmes AE, BE', tandis qu'elles seront de signe contraire dans la région BDA.

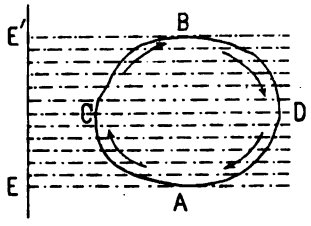

Fig. 194

Ces forces étant égales, puisqu'elles sont appliquées à deux conducteurs ayant la même projection EE', et parallèles parce qu'elles sont toutes perpendiculaires au plan de la figure; le conducteur ACBD sera soumis à l'action d'un couple dont nous donnerons l'expression plus loin. Mais il n'aura aucune tendance à un déplacement de translation, parce que la somme algébrique des projections sur un plan quelconque des forces qui sollicitent ses différents éléments, serait constamment nulle. Il se conduirait donc exactement comme le fait une aiguille aimantée placée dans le champ magnétique terrestre.

Si le champ n'était pas uniforme, ces conclusions ne seraient plus exactes; le circuit serait alors soumis, en général, à deux actions, l'une tendant à lui imprimer un mouvement de rotation, l'autre un mouvement de translation et il tendrait, comme nous le verrons bientôt, à se placer dans une position dans laquelle le flux de force total qui le traverserait serait le plus grand possible.

Enfin, si les lignes de force du champ étaient perpendiculaires au plan du circuit au lieu de lui être parallèles, la résultante des forces appliquées en chaque élément du circuit serait nulle et le circuit ne tendrait à prendre ni mouvement de translation ni mouvement de rotation.

398. — Expression du couple produit par un champ uni-

Digitized by Google

forme sur un circuit fermé mobile autour d'un axe de rotation. — Considérons d'abord le cas le plus simple possible, celui d'un circuit CDEFC, de forme rectangulaire (fig. 195), mobile autour d'un axe de rotation AB situé dans son plan et placé dans un champ magnétique uniforme d'intensité h, dont toutes les lignes de force sont parallèles à la droite OP menée dans le plan de la figure perpendiculairement à l'axe AB. Supposons, en outre, cet axe parallèle à l'un des côtés du rectangle.

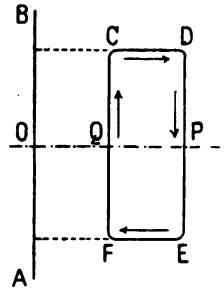

Fig. 195

Le côté CF parcouru par le courant d'intensité I est sollicité par une force perpendiculaire au plan de la figure, qui a pour valeur

$$f = Ih \times \overline{CF},$$

et qu'on peut considérer comme appliquée en son milieu Q. Le moment de cette force, par rapport à l'axe AB, est égal au produit

$$f \times \overline{OQ} = Ih \times \overline{CF} \times \overline{OQ}.$$

De même le moment de la force appliquée au côté ED, a pour valeur

$$Ih \times \overline{DE} \times OP.$$

Ces deux moments sont de signe contraire parce que le courant est lui-même affecté de signes contraires dans les côtés CF et DE comme l'indiquent les flèches. Le moment résultant dû à ces deux côtés est donc

$$Ih \times \overline{DE} \times \overline{OP} - Ih \times \overline{CF} \times \overline{OQ},$$

ou, à cause de l'égalité des côtés CF et DE,

$$Ih \times \overline{CF}(\overline{OP} - \overline{OQ}) = Ih \times \overline{CF} \times \overline{PQ}.$$

Digitized by Google

Quant aux côtés CD et FE, étant parallèles à OP et par conséquent aux lignes de force, ils ne sont soumis à aucune action de la part du champ et par suite le moment total se réduit à celui dont nous venons de trouver la valeur. Or le produit

$$\overline{CF}(\overline{OP} - \overline{OQ}),$$

est précisément l'expression de l'aire du rectangle CDEFC. Donc enfin le moment de force appliquée au circuit fermé CDEFC est égal à

$$Ih \times \text{aire CDEFC.}$$

Si les lignes de force du champ étaient perpendiculaires au plan du circuit mobile au lieu de lui être parallèles, on trouverait sans peine que le moment des forces appliquées au circuit mobile serait nul.

Il résulte de là que si le plan du circuit mobile fait un angle θ avec les lignes de force (que l'on suppose toujours perpendiculaires à l'axe de rotation AB), on peut trouver immédiatement le couple auquel il est soumis en décomposant le champ magnétique en deux autres : l'un dont les lignes de force sont perpendiculaires au plan du circuit et qui ne produira aucun effet, tandis que le second, dont les lignes de force sont parallèles à ce plan et ont une intensité égale à $h \cos \theta$, produit un couple dont la valeur est

$$Ih \cos \theta \times \text{aire CDEFC} = Ih \times (\text{aire CDEFC} \times \cos \theta).$$

Mais le produit compris entre les parenthèses du second membre de cette égalité, n'est autre que l'aire de la projection du contour fermé CDEFC sur un plan parallèle aux lignes de force. D'où ce théorème :

Un circuit rectangulaire fermé, placé dans un champ magnétique uniforme, est soumis à l'action d'un couple dont le moment est le même que si ce circuit était remplacé par sa projection sur un plan parallèle à la direction des lignes de force du champ.

399. — Cas général. — Si le circuit, au lieu d'être rectangulaire, avait une forme quelconque, il serait facile de reconnaître que l'expression du couple reste la même. Il suffit, pour cela, de mener dans le plan de la figure (fig. 196) une série de droites équidistantes.

Digitized by Google

infiniment voisines et parallèles aux lignes de force ou à leur projection sur le plan de la figure. Deux de ces droites consécutives constituent deux des côtés parallèles d'un rectangle infiniment petit dont les deux autres côtés sont des arcs infiniment petits appartenant au circuit. Chacun de ces rectangles est évidemment soumis à l'action d'un couple égal au produit de son aire par Ih, de sorte que le couple total, égal à la somme de tous les couples élémentaires, a pour valeur : $Ih \times$ *aire de la projection du contour fermé, sur un plan parallèle aux lignes de force.*

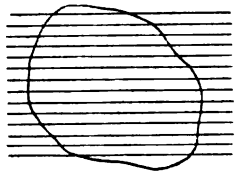

Fig. 196

Il est essentiel de remarquer que l'existence de ce couple est absolument indépendante de celle de l'axe de rotation AB. Car, ainsi que nous l'avons dit plus haut, l'ensemble des forces appliquées à un circuit fermé entièrement libre dans l'espace et placé dans un champ magnétique uniforme, se réduit toujours à un couple, c'est-à-dire à un système de deux forces égales, parallèles, et de sens contraire, qui ne peut qu'orienter le plan du circuit mais non le déplacer parallèlement à lui-même. Si l'on attache le circuit à un axe de rotation, on trouvera facilement le moment du couple appliqué à cet axe, en décomposant le couple primitif appliqué au circuit et dont nous venons de trouver l'expression, en deux autres couples perpendiculaires entre eux et choisis de façon que le plan de l'un d'eux passe par l'axe de rotation, tandis que le plan de l'autre lui est perpendiculaire. C'est ce dernier seul qui tend à faire tourner l'axe. La composition des couples se faisant suivant les mêmes règles que celle des forces, ce petit problème ne présente aucune difficulté.

400. — Équivalence des effets produits par un champ magnétique uniforme sur un circuit fermé ou sur un

Digitized by Google

aimant. — Soit O la projection de l'axe de rotation lié invariablement à un circuit fermé dont le plan lui est parallèle (fig. 197); ce circuit se projette par conséquent suivant une droite telle que CC'.

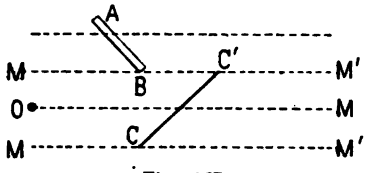

Fig. 197

Soit OM la direction des lignes de force du champ magnétique.

Le moment du couple qui tend à orienter le circuit fermé CC', pris par rapport à l'axe O, a pour valeur

$$Ih \times \textit{Projection de l'aire de } CC' \textit{ sur } OM$$

ou, en appelant θ l'angle du plan de CC' avec OM, et s l'aire comprise dans le contour fermé CC'

$$Ihs \cos \theta.$$

D'autre part, un aimant tel que AB lié invariablement à l'axe O et faisant avec lui un angle droit, est sollicité par un couple dont la valeur est

$$\mathfrak{M}h \sin \theta'$$

$\mathfrak{M}$ désignant le moment magnétique de l'aimant, et θ', l'angle de sa ligne polaire avec les lignes de force parallèles à OM. Si on pose

$$\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

c'est-à-dire si on suppose sa ligne polaire perpendiculaire au plan de CC', le couple devient

$$\mathfrak{M}h \cos \theta.$$

Pour qu'il soit égal au couple dû à l'action du circuit, il suffit que l'on ait

$$Ihs \cos \theta = \mathfrak{M}h \cos \theta,$$

ou

$$Is = \mathfrak{M},$$

et les deux couples seront égaux dans toutes les positions du système. Nous avons déjà trouvé cette équation lorsque nous avons cherché

Digitized by Google

dans quelles conditions un circuit fermé et un aimant produisaient la même action sur un pôle magnétique dont la distance est très grande par rapport aux dimensions du circuit ou de l'aimant (372 et 375).

Dans le cas actuel, le circuit ou l'aimant équivalent peuvent avoir des dimensions quelconques sans que l'équation cesse d'être rigoureuse. Cela tient à ce que nous avons supposé le champ magnétique uniforme dans toute son étendue, condition qui ne peut être réalisée matériellement qu'en produisant ce champ au moyen de centres d'action magnétique placés à une très grande distance.

401. — Moment magnétique d'un solénoïde. — Si, au lieu d'un circuit unique, il en existait plusieurs, et qu'ils fussent parallèles entre eux, il est évident que le moment magnétique de l'aimant équivalent devrait être égal à la somme des produits obtenus en multipliant l'aire de chaque circuit par l'intensité du courant correspondant. En désignant cette somme par ΣIs, on aurait donc,

$$\mathfrak{M} = \Sigma Is.$$

L'exemple le plus simple que l'on puisse choisir dans cet ordre d'idées, est la disposition qui consiste à enrouler sur un cylindre un conducteur recouvert d'isolant, de façon que les spires successives de l'hélice constituée par cet enroulement ne puissent se toucher métalliquement.

On obtient ainsi ce que Ampère a désigné sous le nom de *solénoïde*.

En appelant n le nombre de ces spires identiques que l'on peut, sans erreur appréciable, considérer comme étant des cercles de surface égale parcourus par le même courant, la valeur du moment $\mathfrak{M}$ de l'aimant équivalent, sera donnée par l'expression

$$\mathfrak{M} = nIs.$$

Prenons comme exemple un solénoïde composé de cent spires de 5 centimètres de diamètre parcouru par un courant d'un ampère, et cherchons le moment magnétique de l'aimant équivalent. On a

$$n = 100, \qquad I = 0{,}1 \text{ C.G.S}, \qquad S = 19{,}63,$$

d'où

$$\mathfrak{M} = 196{,}3.$$

Digitized by Google

C'est le moment magnétique d'un petit aimant cylindrique de 5 millimètres de diamètre, de 40 millimètres de longueur et dont l'acier aurait une intensité d'aimantation égale à 250. Il pèserait environ 6gr,3 tandis que le cuivre du solénoïde pèserait (en supposant que le fil eût 1 millim. de diamètre) 110 grammes ; soit 17 fois $\frac{1}{2}$ autant. Mais cette supériorité de l'aimant permanent sur le solénoïde électrique, n'existe que lorsque la valeur de $\mathcal{M}$ n'est pas considérable, parce que le moment magnétique d'un aimant n'est même pas proportionnel au cube de ses dimensions homologues, c'est-à-dire à son poids. Nous avons dit en effet en parlant de l'intensité d'aimantation qu'elle décroît rapidement lorsque les dimensions des aimants augmentent, tandis que le moment magnétique d'un solénoïde est proportionnel à la quatrième puissance des dimensions homologues, lorsqu'on maintient constante la densité du courant.

Considérons, en effet, deux solénoïdes ayant le même nombre de spires et géométriquement semblables entre eux ; c'est-à-dire que toutes les dimensions linéaires du second sont à celles du premier comme le nombre k est à 1. La surface s' de chacune des spires du second sera égale à $k^2 s$; et, en outre, le fil qui constitue chaque spire ayant un diamètre k fois aussi grand, aura aussi une section k^2 fois aussi grande et pourra livrer passage à un courant égal à k^2I. Le moment magnétique du second solénoïde sera donc égal à

$$k^2 \mathrm{I} \times k^2 s = k^4 \mathrm{I} s,$$

tandis que son poids ne croîtra que proportionnellement à k^3.

§ 2. — ACTION EXERCÉE PAR UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UN ÉLÉMENT DE CONDUCTEUR A TROIS DIMENSIONS.

402. — Expression de la force exercée par un champ magnétique sur un conducteur à trois dimensions. — Dans tout ce qui précède nous avons supposé que les conducteurs étaient filiformes c'est-à-dire sans épaisseur, et par une abstraction irréalisable, nous avons admis que le courant pouvait cependant avoir une intensité finie. Les lois d'Ohm et de Joule nous apprennent que

Digitized by Google

la quantité de chaleur dégagée dans ces conditions par le passage d'un courant, serait infinie, à moins que l'intensité du courant ne fût infiniment petite ; mais il est à peine besoin de dire que cette impossibilité de faire passer un courant d'intensité finie dans un fil de section infiniment petite, n'infirme en rien les résultats auxquels nous sommes arrivés. Dans la réalité, on devra considérer un conducteur comme étant composé d'une infinité de conducteurs filiformes de section infiniment petite et soudés entre eux comme les fils d'un câble. En appelant $d\sigma$ la section infiniment petite d'un de ces conducteurs élémentaires et i la densité du courant que l'on se donne d'avance, le courant qui passe dans le fil de section $d\sigma$ a pour valeur

$$id\sigma,$$

de sorte que la formule de Biot et Savart pourrait s'écrire, en introduisant la section du conducteur

$$f = \frac{\mu i d\sigma ds \sin\theta}{r^2}.$$

Il faut remarquer que $d\sigma$ étant une section infiniment petite, est un infiniment petit du second ordre, tandis que ds est du premier ordre, la force f est donc un infiniment petit du troisième ordre.

Pour trouver la valeur de f sous forme finie, il faudrait, en général, rapporter le système conducteur à un système d'axes coordonnés et exprimer les quantités qui entrent dans cette formule en fonction des trois coordonnées de chaque point du système conducteur et faire au moins deux intégrations successives (si toutefois elles étaient possibles). Cela conduirait à des calculs inextricables pour obtenir simplement la valeur de l'action exercée sur un pôle magnétique, c'est-à-dire du champ magnétique en un seul point de l'espace. Dans la pratique, on a dû chercher des méthodes ou des expédients permettant de supprimer ou du moins de réduire considérablement les calculs dont nous venons de donner la très rapide énumération et on est arrivé, dans un certain nombre de cas simples, à trouver non seulement la valeur de f, mais aussi à déterminer la forme des lignes de force du champ magnétique d'un système conducteur.

Digitized by Google

Nous reviendrons plus loin sur ce sujet lorsque nous parlerons du potentiel d'un circuit fermé, mais nous voulons montrer tout de suite le parti que l'on peut tirer des flux de force pour éviter dans certains cas les calculs dont nous venons de parler.

Rappelons d'abord que l'on peut décomposer l'intensité du champ magnétique en un point de l'espace comme on décompose une force, puisque cette intensité est, par définition, la force appliquée à l'unité de masse magnétique. Cela étant, représentons par un petit rectangle C (fig. 198) de base dx et de hauteur dz la section infiniment petite d'un conducteur de longueur dy perpendiculaire au plan de la

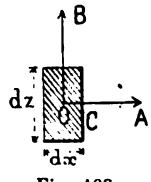

Fig 198

figure. Nous pourrons considérer l'intensité du champ magnétique dans lequel se trouve cet élément de conducteur, comme étant la résultante de trois intensités différentes rectangulaires entre elles ; les deux premières OA et OB situées dans le plan de la figure et par conséquent perpendiculaires à la direction du courant ; et la troisième perpendiculaire au plan de la figure et dirigée suivant l'élément de courant. Cette dernière, en vertu de la formule démontrée au n° 395, ne donne lieu à aucune action mécanique sur l'élément de conducteur ; nous pouvons donc la laisser de côté. Quant à la composante du champ représentée par $\overline{OA}$, elle donne lieu à une force perpendiculaire au plan formé par cette composante et par l'élément de courant et qui, par conséquent, se projette suivant la direction OB de la seconde composante ou suivant son prolongement. L'intensité f_{OB} de cette force est donnée par l'expression

$$f_{OB} = \overline{OA} \times I \times dy.$$

Mais l'intensité totale I du courant qui traverse la section du conducteur, a pour valeur le produit de cette section par la densité i du

Digitized by Google

courant, donc

$$f_{OB} = \overline{OA} \times i \times dx.dz \times dy.$$

dy étant la dimension du conducteur dans le sens perpendiculaire au plan de la figure, le produit $dy.dz$ représente l'aire de la face du conducteur qui est perpendiculaire à OA; tandis que le produit $\overline{OA}.dy.dz$ représente *le flux de force* magnétique qui la traverse. Nous pouvons donc écrire, en désignant ce flux élémentaire par φ_{OA}

$$f_{OB} = idx\varphi_{OA},$$

ou en remplaçant f_{OB} par f_x et φ_{OA} par φ_x

$$f_x = idx\varphi_x.$$

Le produit dx peut se mettre sous une autre forme; en effet, le courant total I qui traverse la section droite C étant égal au produit de cette section par la densité i du courant, on a

$$I = idx.dz,$$

d'où

$$idx = \frac{I}{dz}.$$

Mais $\frac{I}{dz}$ est l'intensité du courant que traverserait un élément de conducteur ayant la même épaisseur dx que celui que représente la figure, mais dont la hauteur dz serait égale à l'unité. Si nous représentons cette intensité par I_1, nous aurons l'expression très simple

$$f_x = I_1\varphi_x,$$

dont nous allons faire immédiatement une application intéressante.

403. — Effort longitudinal exercé sur un solénoïde par un aimant placé à son intérieur. — Supposons d'abord que le solénoïde AB (fig. 199) soit très long par rapport à son diamètre, et qu'au lieu d'un aimant il y ait en M un simple pôle magnétique

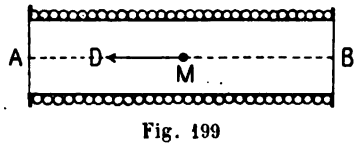

Fig. 199

Digitized by Google

placé sensiblement au milieu du solénoïde. Pour appliquer la formule que nous venons de démontrer, nous supposerons que l'axe des z se confond avec l'axe AB du solénoïde et nous allons chercher l'expression de la somme des forces élémentaires appliquée au pôle M suivant cette direction. Nous venons de voir que chaque élément de conducteur exerce, sur le pôle M, une force qui a pour mesure le produit de I_1 par le flux de force magnétique qui traverse normalement la face du conducteur parallèle à la direction de cette force. Par conséquent, la somme de toutes ces forces élémentaires est égale au facteur commun I_1 (dont la valeur est la même en chaque point du solénoïde si l'enroulement est bien régulier) multiplié par la somme de tous les flux de force qui traversent normalement la surface intérieure du solénoïde. Or, le théorème de Green nous permet d'évaluer immédiatement la valeur de ce flux. En désignant par μ la quantité de magnétisme contenue dans le pôle M, nous savons que le flux total qui traverserait la surface du solénoïde, si elle s'étendait *indéfiniment* à droite et à gauche de M, aurait pour valeur $4\pi\mu$ (207). Par conséquent, l'effort total exercé parallèlement à AB par un solénoïde indéfini, a pour expression

$$F = 4\pi\mu I_1.$$

Cette expression étant indépendante de la position de M lorsque le solénoïde est indéfini, s'appliquera également à un nombre quelconque d'autres masses magnétiques, et si ces masses étaient solidaires les unes des autres, la résultante de toutes ces forces parallèles serait égale à leur somme ΣF ; on aurait donc, en désignant par $\Sigma\mu$ la somme de toutes les masses magnétiques

$$\Sigma F = 4\pi I_1 \Sigma\mu.$$

Si le solénoïde ne peut être considéré comme infiniment long, on peut tenir compte de la manière suivante de l'erreur commise en appliquant la formule ci-dessus.

Le flux de force *total* émané d'un pôle magnétique M (fig. 200) de masse μ, a pour valeur $4\pi\mu$. Mais lorsque la surface qui enveloppe la masse magnétique M n'est pas entièrement fermée, il faut déduire de ce flux celui qui traverse les ouvertures pratiquées dans la sur-

Digitized by Google

face, c'est-à-dire $\mu\omega$; ω désignant la grandeur de la surface découpée dans la sphère de rayon 1, par un cône dont le sommet est en M et dont les génératrices s'appuient sur le contour de l'ouverture considérée.

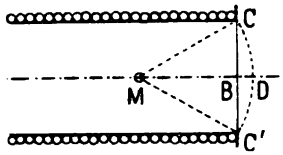

Fig. 200

Si nous supposons que la masse M soit située sur l'axe d'un solénoïde cylindrique, l'évaluation de la quantité désignée par ω est facile. Décrivons, du point M comme centre, une sphère dont le rayon MC est égal à la distance qui sépare du point M chacun des points de l'ouverture circulaire CC′ du solénoïde, et calculons l'aire de la calotte sphérique CDC′. En la divisant par le carré du rayon MC de la sphère, nous obtiendrons la valeur de la surface ω découpée sur la sphère de rayon 1 par le cône CMC′.

La géométrie élémentaire nous apprend que l'aire d'une calotte sphérique est égale au produit de la circonférence d'un grand cercle par la hauteur de cette calotte, soit

$$2\pi \times \overline{MC} \times \overline{BD}.$$

La surface ω découpée sur la sphère de rayon 1 est donc

$$\frac{2\pi \times \overline{MC} \times \overline{BD}}{\overline{MC}^2} = 2\pi \times \frac{\overline{BD}}{\overline{MC}}.$$

Le rapport de cette surface ω à la surface entière 4π de la sphère de rayon 1, est donc égal à

$$2\pi \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{MC}} : 4\pi = \frac{1}{2} \frac{\overline{BD}}{\overline{MC}}$$

La seconde ouverture du solénoïde (non représentée sur la figure) donnerait lieu à un calcul identique. En remplaçant $\overline{BD}$ et $\overline{MC}$ par $\overline{B'D'}$ et $\overline{M'C'}$, et ω par ω', on aurait pour cette seconde ouverture

$$\frac{\omega'}{4\pi} = \frac{1}{2} \frac{\overline{B'D'}}{\overline{M'C'}}.$$

Digitized by Google

L'erreur *relative* commise en écrivant

$$F = 4\pi\mu I_1,$$

est donc égale à

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BD}}{\overline{MC}} + \frac{\overline{B'D'}}{\overline{M'C'}}\right),$$

ou, en désignant par α l'angle plan CMD et par α' l'angle correspondant à l'autre ouverture du solénoïde

$$\frac{1}{2}\left[(1-\cos\alpha)+(1-\cos\alpha')\right] = 1 - \frac{\cos\alpha+\cos\alpha'}{2}.$$

Cette expression peut se simplifier lorsque le rayon BC de l'ouverture est une petite fraction de MC. On a en effet, dans ce cas, avec une très grande approximation

$$1-\cos\alpha = \frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{MC}}\right)^2,$$

et par conséquent l'erreur relative commise en supposant le solénoïde infiniment long, deviendrait

$$\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{MC}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{B'C'}}{\overline{M'C'}}\right)^2\right].$$

Si on prend par exemple

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{MC}} = \frac{1}{10}, \qquad \frac{\overline{B'C'}}{\overline{M'C'}} = \frac{1}{10},$$

c'est-à-dire si on suppose que le diamètre de l'ouverture du solénoïde est égal à la dixième partie de sa longueur et que le pôle M est à égale distance des deux ouvertures, on trouve que l'erreur relative est de $\frac{1}{200}$.

Si au lieu d'un pôle magnétique, on suppose qu'il en existe deux égaux et de signe contraire placés tous deux sur l'axe du solénoïde, mais à des distances inégales du milieu, on trouverait facilement l'action longitudinale exercée par le solénoïde, en calculant l'action exercée sur chaque pôle comme nous venons de le faire, et en les retranchant l'une de l'autre.

Enfin, s'il s'agit d'un aimant pour lequel on ne croit pas pouvoir

Digitized by Google

considérer les masses magnétiques comme concentrées en deux pôles, le théorème s'applique encore en toute rigueur lorsque le solénoïde peut être considéré comme infiniment long et encore sous la condition, bien entendu, que l'aimant n'ait qu'une seule région polaire engagée dans le solénoïde et que sa longueur neutre soit telle que le second pôle, placé en dehors et loin de l'ouverture du solénoïde, ne subisse qu'une action négligeable.

On verra dans le chapitre relatif aux méthodes employées pour mesurer l'intensité absolue des courants, l'importance de ces considérations ainsi que le moyen de tenir compte expérimentalement de l'erreur commise lorsque le solénoïde n'est pas très long.

La valeur de I_1 se déduit facilement de celle du nombre de spires contenues dans une longueur de 1 centimètre, comptée parallèlement à l'axe du solénoïde. Si on désigne par n_1 ce nombre et par I l'intensité du courant, il est facile de voir que l'on a

$$I_1 = n_1 I$$

et que, par conséquent, la force exercée sur une masse magnétique μ a pour expression, lorsque le rapport de la longueur du solénoïde à son diamètre est grand

$$F = 4\pi n_1 I \mu.$$

Digitized by Google

CHAPITRE TROISIÈME

TRAVAIL PRODUIT PAR LE DÉPLACEMENT RELATIF D'UN SYSTÈME D'AIMANTS ET DE COURANTS

§ 1. — TRAVAIL PRODUIT PAR LE DÉPLACEMENT D'UN CONDUCTEUR DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE.

404. — Théorème du flux de force coupé. — L'effort appliqué à un élément de conducteur de longueur dl, parcouru par un courant d'intensité I, placé dans un champ magnétique d'intensité h, avec les lignes de force duquel il fait un angle θ, est donné par l'équation (395)

$$f = hIdl \sin \theta$$

et il est dirigé perpendiculairement au plan formé par l'élément dl et par la ligne de force qui passe par le milieu de cet élément.

Si on lui permet de se déplacer dans une direction quelconque, nous savons que le travail produit a pour mesure le produit de la force f par la projection du déplacement sur la direction de cette force. Par conséquent, si on désigne par dx la grandeur du déplacement et par φ l'angle de dx avec la direction de f, le travail a pour valeur

$$fdx \cos \varphi = hI.dl. \sin \theta \cos \varphi.dx.$$

Pour interpréter cette expression le plus simplement possible, soit CC′ (fig. 201) l'élément de courant et MM′ une des lignes de force du champ coupant CC′ en son milieu m et faisant avec lui un angle $C'mM' = \theta$.

Digitized by Google

La projection DD′ de CC′ sur une perpendiculaire à MM′, représente la quantité $dl \sin \theta$; et si cette projection était réellement un élément de conducteur traversé par le courant I, cet élément serait sollicité par la même force f perpendiculairement au plan de

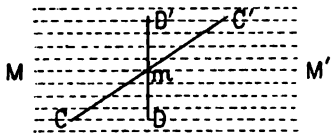

Fig. 201

la figure. Désignons maintenant par dz la projection $(dx \cos \varphi)$ sur la direction de f, du déplacement imprimé à DD′ qui, pour nous, remplace CC′, et par dx la longueur $DD' = dl \sin \theta$. Nous pouvons écrire

$$f dx \cos \varphi = hI.dx.dz.$$

Or, le produit $dx.dz$ est l'aire du rectangle ayant pour base $DD' = dx$ et pour hauteur le déplacement dz de CC′ suivant la direction de f. Les deux côtés de ce rectangle étant perpendiculaires aux lignes de force, son plan l'est également, et le produit de son aire $dx.dz$ par l'intensité h du champ, représente la valeur du flux de force magnétique qui le traverse et qui traverse également l'aire du parallélogramme réellement engendré par le déplacement de l'élément CC′. On a donc, en désignant par $d\mathcal{F}$ le flux de force

$$f dx \cos \varphi = I d\mathcal{F}.$$

D'où ce théorème important :

Le travail produit par un élément de conducteur qui se déplace dans un champ magnétique, a pour mesure le produit de l'intensité du courant qui le traverse, par le flux de force magnétique coupé par l'élément pendant son déplacement.

Mais ceci pouvant s'appliquer à chacun des éléments d'un conducteur de longueur et de forme quelconques traversé par un courant qui a la même intensité dans tous ses points, on voit que le théorème peut s'énoncer d'une façon beaucoup plus générale en disant que le travail développé par un circuit quelconque qui se déplace

Digitized by Google

dans un champ magnétique, est égal au produit de l'intensité du courant par la somme de tous les flux de force magnétique coupés par chacun de ses éléments pendant qu'il passe d'une position à une autre.

405. — Autre forme de l'énoncé du théorème précédent. — Théorème du flux de force embrassé. — Supposons que le circuit soit constitué par une courbe fermée, déformable ou non, à laquelle on imprime un déplacement absolument quelconque dans un champ magnétique produit par des centres magnétiques distribués arbitrairement dans l'espace. Appelons $\mathcal{F}_0$ le flux total de force magnétique embrassé par le circuit dans sa première position et $\mathcal{F}_1$ la valeur de ce flux lorsque le circuit occupe la seconde position (en ayant soin de bien tenir compte du sens dans lequel les lignes de force traversent le plan du circuit). Il est évident que le flux embrassé par la courbe fermée qui forme le circuit, n'a pu augmenter ou diminuer qu'à la condition qu'un nombre de canaux de force égal à $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0$ passe de l'extérieur à l'intérieur de la courbe et coupe par conséquent le périmètre de cette courbe. C'est au moment où cette intersection a lieu, que se produit le travail mécanique qui a par conséquent pour mesure

$$I(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0),$$

d'où on conclut que : *le travail mécanique développé par un circuit fermé filiforme qui se déplace dans un champ magnétique, a pour mesure le produit de l'intensité du courant par la variation du flux total de force magnétique embrassé par ce circuit pendant le déplacement.*

Il résulte de là, que le travail produit par un circuit déformable ou non qui, partant d'une certaine position, revient l'occuper exactement après avoir parcouru un trajet quelconque dans un champ magnétique, est finalement égal à zéro. Mais ceci n'est vrai qu'à la condition expresse que l'intensité du courant ainsi que les éléments du champ magnétique n'aient éprouvé aucune variation pendant le cycle décrit par le circuit. S'il en était autrement, le travail méca-

Digitized by Google

nique pourrait avoir une valeur différente de zéro. Elle serait dans tous les cas, égale à la valeur de l'intégrale $\int I d\mathcal{F}$.

406. — Exemples de calcul du travail produit par le déplacement d'un circuit fermé dans un champ magnétique. — La seconde forme de l'expression du travail est précieuse au point de vue pratique, parce que le calcul direct du flux qui coupe le périmètre du circuit serait souvent très difficile et peut-être même impossible, tandis que celui de la variation du flux enfermé dans ce périmètre, est aisé dans nombre de cas. Mais il ne faut pas perdre de vue que cette seconde forme est une conséquence algébrique de la première et rien de plus. La première, au contraire, exprime un fait physique sans lequel le travail mécanique ne se produit pas, et qui consiste en ce que les éléments du conducteur doivent se *déplacer dans un espace doué de la propriété magnétique, et par conséquent couper les lignes de force* par lesquelles nous représentons géométriquement cette propriété magnétique. Il est à peine besoin de dire d'ailleurs, que si le circuit était fixe dans l'espace et que les centres magnétiques fussent mobiles, le résultat serait rigoureusement le même, à la condition, bien entendu, que le mouvement relatif du circuit et des centres magnétiques, fût identique dans les deux cas.

Nous allons donner quelques exemples de l'application de cette seconde formule.

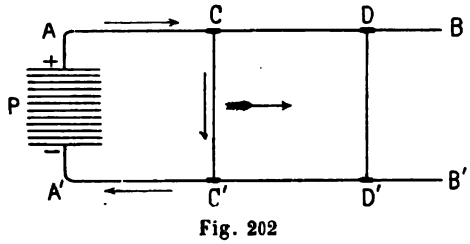

Fig. 202

PREMIER EXEMPLE. — Cherchons d'abord le travail produit par un fil rectiligne (fig. 202) CC′ qui glisse parallèlement à lui-même sur deux conducteurs rectilignes parallèles AB, A′B′ reliés entre eux par un troisième conducteur AA′ dans lequel est intercalée une

Digitized by Google

source d'électricité P. Cet ensemble est supposé placé dans un champ magnétique uniforme dont toutes les lignes de force sont perpendiculaires au plan de la figure.

Le conducteur étant supposé placé d'abord dans la position CC′, forme avec les côtés CA, AA′, A′C′, un circuit fermé dont nous n'avons pas besoin de connaître l'aire, puisque c'est de l'*accroissement* du flux de force qui la traverse et non de la valeur absolue de ce flux, que dépend le travail produit. En passant de la position CC′ à la position DD′ le conducteur mobile augmente l'aire totale de la quantité CDD′C′C. Le travail $\mathfrak{T}$ produit pendant ce déplacement a donc pour mesure le produit de l'intensité I du courant par l'accroissement de flux magnétique correspondant. On a donc

$$\mathfrak{T} = I \times h \times \text{surface CDD′C′C},$$

h désignant l'intensité du champ uniforme.

Si nous avions traité ce problème en nous appuyant directement sur la loi de Biot et Savart, nous aurions calculé d'abord la force appliquée au fil mobile CC′ en vertu de l'action du champ magnétique et nous aurions trouvé, en la désignant par F

$$F = h \times I \times \overline{CC'}.$$

Puis nous aurions obtenu le travail en multipliant F (qui est dirigé dans le sens de la flèche empennée) par le déplacement de CC′ dans le sens de la force, c'est-à-dire par CD ou C′D′, nous aurions eu ainsi

$$\mathfrak{T} = h \times I \times \overline{CC'} \times \overline{CD} = hI \times \text{surface CDD′C′C},$$

valeur identique à celle que nous venons de trouver.

Deuxième exemple. — Supposons maintenant que le conducteur, au lieu de glisser parallèlement à lui-même, tourne autour d'un axe C (fig. 203) perpendiculaire au plan de la figure et parallèle aux lignes de force du champ uniforme. Cet axe communique au moyen d'un frotteur B′ et du conducteur B′DE avec l'un des pôles de la pile P. L'autre pôle est relié au frotteur B lequel appuie constamment sur la circonférence métallique BJKLB dont l'un des points C′ est soudé au conducteur C′C et qui tourne par conséquent avec ce conducteur. L'ensemble formé par la circonférence

Digitized by Google

BJKLB et le conducteur C'C, est supporté par un disque en matière isolante de façon que le courant, après s'être partagé entre les deux portions de circonférence BC' et BLKJC', est obligé de traverser intégralement le conducteur mobile C'C. Ce dernier, étant placé dans un champ magnétique dont les lignes de force sont perpendi-

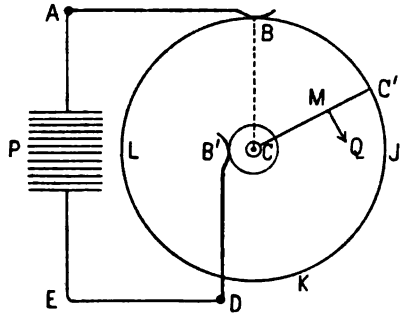

Fig. 203

culaires au plan de la figure, est sollicité en chaque point par des forces telles que MQ situées dans le plan de la figure et perpendiculaires à CC'; il tend donc à prendre un mouvement de rotation sous l'influence des forces constantes qui agissent sur lui et dont nous allons calculer le moment.

Désignons par l la longueur du conducteur CC'; par α l'angle BCC' décrit depuis la position initiale CB jusqu'à la position actuelle CC'; par h l'intensité du champ magnétique et par I celle du courant.

Le travail développé pendant que le conducteur décrit l'angle BCC', a pour mesure

$$\mathfrak{T} = \mathrm{I} \times h \times \text{aire BCC'B} = \mathrm{I}h \cdot \frac{\alpha l^2}{2}.$$

Mais ce travail a aussi pour expression le produit du moment $\mathfrak{M}$ de la résultante de toutes les forces appliquées au conducteur CC' par l'angle α, d'où

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{M}b\alpha.$$

Ces deux valeurs de $\mathfrak{T}$ devant être égales, on a nécessairement

$$\mathfrak{M}b\alpha = \mathrm{I}h\frac{\alpha l^2}{2},$$

Digitized by Google

d'où

$$\mathcal{M} = \frac{Ihl^2}{2}.$$

C'est la valeur de la force qui, appliquée à la circonférence d'une poulie de rayon 1, produirait le même travail $\mathfrak{T}$ lorsque la poulie tournerait d'un angle α.

Choix des unités. — Pour traduire ces formules en nombres, il faut exprimer l'intensité I en unités électro-magnétiques C.G.S., c'est-à-dire en dizaines d'ampères; h en unités magnétiques C.G.S.; l en centimètres. L'angle α doit être considéré comme représentant le rapport de l'arc *linéaire* BC', au rayon CC'; il doit donc être pris égal à 2π ou 6,2832 lorsqu'on veut calculer le travail $\mathfrak{T}$ développé pendant un tour complet. Quant au travail mécanique $\mathfrak{T}$, il est exprimé en *ergs* (Un kilogrammètre vaut 98,100,000 ergs).

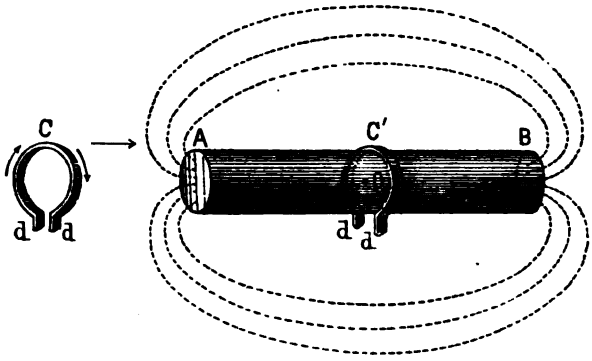

Fig. 204

Troisième exemple. — Une bague métallique C (fig. 204), coupée en un point, dans laquelle on entretient un courant circulaire d'intensité I en faisant glisser deux de ses points très rapprochés *dd* sur deux conducteurs fixes (non représentés sur la figure) aboutissant à une pile, se meut parallèlement à elle-même, de façon que son centre décrive une droite qui se confond avec la ligne polaire d'un aimant droit AB. On demande d'évaluer le travail mécanique produit pendant ce déplacement, en admettant que dans sa première position C, la bague soit assez loin du pôle A pour ne recevoir qu'un flux de

Digitized by Google

force négligeable et que dans sa seconde position C', son centre coïncide avec le point neutre de l'aimant.

Si nous voulions appliquer la loi du flux coupé, le problème serait au-dessus de nos forces, parce que nous ne pourrions exprimer analytiquement la valeur de ce flux correspondant à chacun des déplacements successifs de la bague. La seconde forme de la valeur du travail (loi du flux embrassé), va nous permettre, au contraire, de résoudre immédiatement la question. En effet, le travail produit étant égal à

$$I(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0),$$

il suffit de trouver la valeur de ces deux flux de force. Or on a, dans la première position

$$\mathcal{F}_0 = 0,$$

le travail se réduit donc à

$$I\mathcal{F}_1.$$

Mais $\mathcal{F}_1$ est précisément le flux total de force qui traverse l'aimant en son milieu, c'est-à-dire $4\pi\mathfrak{J}s$, $\mathfrak{J}$ étant l'*intensité d'aimantation* du barreau et s sa section (251).

Le travail cherché a donc pour valeur

$$4\pi s\mathfrak{J}I.$$

Supposons par exemple qu'il s'agisse d'un gros électro-aimant de 20 centimètres de diamètre dans lequel il est facile d'obtenir un flux de 10 000 unités par centimètre carré, on aura

$$s = 314^{\text{cent. carr.}}$$

$$\mathcal{F}_1 = 314 \times 10000 = 3140000,$$

et si la bague est traversée par un courant de 10 Ampères ou 1 unité C.G.S., le travail développé aura pour valeur 3 140 000 *ergs* ou environ $0^{kgm},032$. Si l'on fait passer ainsi successivement 1000 bagues ou spires de la position C à la position C' et qu'on rompe le courant dans chacune d'elles lorsqu'elle arrive en C', le travail total produit sera égal à 32 kilogrammètres. Nous verrons plus tard comment on peut réaliser cela pratiquement.

Digitized by Google

407. — Ce dernier exemple montre bien l'importance pratique de la seconde forme de l'expression du travail mécanique développé par un circuit fermé qui se déplace dans un champ magnétique, et nous verrons, en traitant des moteurs électriques, à quel degré de simplicité il permet de ramener leur théorie, soit qu'ils servent à produire du travail mécanique au moyen d'un courant, soit qu'ils aient au contraire un but inverse.

La facilité avec laquelle ce théorème permet ainsi de résoudre des problèmes dans lesquels on élimine des quantités qu'il serait nécessaire de connaître si l'on se servait de la première forme (théorème du flux coupé), a eu pour résultat de faire perdre de vue son origine à quelques savants qui le considèrent comme un théorème indépendant et déduit directement de l'expérience, attendu, disent-ils, qu'on ne peut jamais opérer que sur des circuits fermés. Certains d'entre eux lui appliquent même la dénomination de *principe* du flux embrassé.

408. — Digression sur les écrans magnétiques. — Nous n'adopterons pas cette manière de voir, d'abord parce que, au point de vue purement historique, il est certain que le théorème du flux coupé a précédé l'autre qui n'en est qu'une simple conséquence, comme on l'a vu, et ensuite parce que, si le second théorème présente de grands avantages pratiques, il a, en revanche, l'inconvénient de faire connaître les résultats bruts d'un calcul, sans donner aucune notion sur l'enchaînement des phénomènes intermédiaires qui entrent en jeu dans la question pour laquelle on l'utilise. Nous allons faire comprendre ceci par un exemple auquel nous avons fait allusion en parlant de la propriété du fer à laquelle on a donné le nom d'*écran magnétique*.

Supposons que dans le second exemple de l'alinéa précédent (fig. 203), on ait entouré le conducteur radial tournant CC′ d'un tube de fer à parois très épaisses : les lignes de force du champ magnétique extérieur seront-elles affectées par sa présence ou bien, au contraire, conserveront-elles la même forme? Dans les ouvrages classiques actuels, on affirme nettement que leur forme est profondé-

Digitized by Google

ment modifiée et que, si le tube est très épais, aucune d'elles ne pénètre dans la région centrale occupée par le conducteur qui se trouve ainsi dans un milieu non magnétique ; les parois du tube seraient, au contraire, sillonnées par des lignes de force très denses affectant une forme sensiblement demi-circulaire comme on le voit (fig. 205).

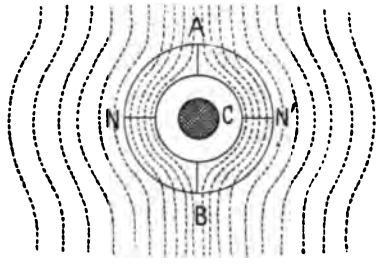

Fig. 205

Cette manière de voir paraît d'ailleurs corroborée par l'aspect des fantômes magnétiques qui accusent un champ très énergique en dehors du tube et un champ presque nul à l'intérieur, et enfin, il est bien certain que les parois du tube livrent passage à un flux magnétique intense, car si on coupe le tube en deux par un plan diamétral NN', perpendiculaire aux lignes de force et passant par le conducteur C, on constate que les deux moitiés NAN', NBN' du tube, adhèrent énergiquement l'une à l'autre dans toute leur longueur. Si, au contraire, on fait la section longitudinale du tube suivant AB, par un plan parallèle aux lignes de force, on trouve que les deux moitiés ANB, AN'B se repoussent, ce qui prouve en A la présence d'un pôle conséquent et en B la présence d'un second pôle conséquent qui est de signe contraire. On conclut de là qu'une certaine portion du flux de force du champ extérieur se divise en deux nappes symétriques par rapport à AB et qu'elle reste confinée dans les parois métalliques du tube, qui lui offrent un chemin beaucoup moins résistant que l'air contenu dans la région intérieure occupée par le conducteur.

Nous n'admettons pas cette manière d'expliquer la répartition des lignes de force, et voici l'interprétation que nous lui donnons.

Digitized by Google

Comme nous l'avons déjà exposé dans la partie de cet ouvrage qui est relative à l'induction magnétique, nous pensons que, conformément à ce que *l'on admet implicitement lorsqu'on démontre le Théorème de Green*, les actions émanées de chaque centre magnétique élémentaire, se propagent en ligne droite et comme si les autres centres n'existaient pas. Mais, si on cherche la résultante de ces actions indépendantes appliquées simultanément à une masse magnétique, la grandeur et la direction de cette résultante n'a aucun rapport simple avec les composantes. Les lignes de force, que l'on peut se représenter comme décrites par le libre mouvement dans l'espace de la masse-magnétique-unité soumise aux forces simultanées qui émanent de tous les centres primitifs (cette masse-unité étant supposée dénuée d'inertie), prennent une forme extrêmement compliquée qui n'a plus le moindre rapport avec les lignes de force rectilignes des centres d'action élémentaires, bien qu'elles en soient déduites suivant les règles ordinaires de la statique. Cela posé, il devient facile de reconnaître que la présence du tube de fer donne naissance à deux systèmes de lignes de force qui sont : 1° le système qui existait primitivement avant l'introduction du tube dans le champ ; 2° le système développé dans le fer lui-même par induction magnétique et qui prend naturellement naissance dans la portion de l'espace où ce métal existe, puisque chacune de ses molécules est douée de la propriété de se transformer en un aimant énergique sous l'influence du champ extérieur. Ce second système est donc propre au fer ; les flux de force qui le constituent ont été créés dans le métal lui-même ; et ils n'appartiennent nullement au champ extérieur. *C'est ce que tous les auteurs admettent expressément* lorsque, exposant les principes fondamentaux de l'induction magnétique, ils écrivent l'équation :

Flux total intérieur = Flux du champ extérieur + Flux induit.

Ces deux systèmes de lignes de force émanant de deux systèmes matériels (le ou les aimants qui engendrent le champ magnétique, et le tube) coexistent, suivant nous, dans l'espace sans s'influencer et l'expérience suivante permet de séparer complètement l'action des aimants extérieurs de celle qui est due au tube de fer.

Digitized by Google

409. — Supposons que le conducteur tournant CC′ (fig. 203), au lieu de s'arrêter en C′ à une circonférence métallique contre laquelle frotte le balai B qui ramène directement le courant à la pile, soit courbé en C′ (fig. 206) suivant un arc de cercle C′D′, puis recourbé de nouveau en D′ suivant un second rayon D′D de même longueur que CC′. Les extrémités C et D de ce circuit, étant à la même dis-

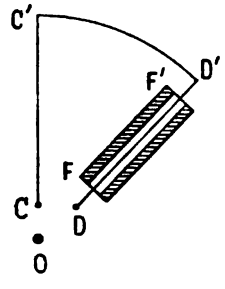

Fig 206

tance du centre D de rotation du disque en bois qui sert de support, et communiquant avec deux frotteurs non représentés sur la figure, on comprend sans peine que si un courant est lancé dans ce système de façon à entrer en C pour sortir en D, les actions mécaniques produites par le champ magnétique sur les deux conducteurs identiques C′C, D′D seront égales et inverses, les lignes de force du champ étant toutes d'égale intensité et parallèles à l'axe O.

Mais, si on enveloppe le conducteur DD′ d'un tube de fer FF′, qui fasse corps avec lui, sans le toucher, le champ magnétique est profondément modifié en apparence dans la région où se trouve le tube, comme le montre le tracé graphique de la figure 205; l'espace qui environne immédiatement le conducteur DD′ paraît complètement dépourvu de lignes de force, tandis que les parois du tube sont sillonnées de lignes de force très nombreuses. Malgré ce changement considérable apporté au champ magnétique primitif, l'expérience montre que le système CC′D′D reste en équilibre quelles que soient l'intensité du courant, celle du champ magnétique et les dimensions du tube de fer.

Pour tirer de cette expérience des conclusions, relativement à la

Digitized by Google

grandeur des forces appliquées à chaque portion du circuit, remarquons d'abord que le tube de fer étant lié invariablement au circuit mobile CC'D'D, les actions exercées sur lui par les différentes parties de ce circuit sont, en vertu du principe de la réaction égale et contraire à l'action, accompagnées d'actions inverses qui leur font équilibre, de sorte que nous n'avons pas à en tenir compte. Il en est de même des actions mutuelles des différentes portions du conducteur CC'D'D.

Il ne nous reste donc plus à évaluer que les forces développées par les aimants extérieurs qui engendrent le champ uniforme dans lequel se meut, en tournant autour du point O, le système CC'D'D. On peut les réduire à quatre, savoir :

(*a*) ACTION DU CHAMP EXTÉRIEUR SUR LE CONDUCTEUR CC'. — Nous avons vu qu'elle est mesurée par le moment d'une force qui a pour expression

$$\mathcal{M}b = \frac{Ihl^2}{2}.$$

(*b*) ACTION DU CHAMP SUR L'ARC DE CERCLE C'D'. — La force appliquée en chaque point de ce conducteur est perpendiculaire au plan passant par la direction du courant et de la ligne de force au point considéré ; elle est donc normale au conducteur C'D' en chacun de ses points et passe par conséquent par l'axe de rotation O. Il en résulte que l'ensemble des forces appliquées à C'D' est simplement équilibré par la résistance des pivots et ne produit aucune tendance à la rotation.

(*c*) ACTION EXERCÉE SUR LE TUBE DE FER FF'. — Ce tube est soumis à l'influence du champ magnétique principal engendré par les aimants extérieurs ainsi qu'à celle du circuit fermé CC'D'D. Ces deux influences produisent dans le tube une aimantation résultante, indépendante de l'angle qu'il décrit pendant sa rotation autour de l'axe O, le champ extérieur étant supposé uniforme. La rotation du tube autour de l'axe O ne peut donc donner lieu à aucune production de travail ; car s'il en était autrement, en le remplaçant par un aimant permanent identique à lui et en supprimant le circuit CC'D'DC, on pourrait obtenir une production indéfinie de travail qui n'entraînerait aucune dépense d'énergie.

Digitized by Google

Donc, le moment des forces dues à l'action du champ magnétique extérieur uniforme sur le tube de fer, est constamment nul.

(*d*) ACTION DU CHAMP SUR LE CONDUCTEUR DD'. — Par hypothèse, cette action nous est inconnue ; mais nous allons la déduire immédiatement de l'état d'équilibre du système, considéré comme un fait expérimental.

Les quatre actions (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) auxquelles se réduisent toutes les forces qui tendent à faire tourner le système autour de l'axe O, nous donnent l'équation symbolique

$$(a) + (b) + (c) + (d) = 0.$$

Mais nous venons de démontrer que l'on a séparément

$$(b) = 0, \qquad (c) = 0.$$

Donc, on a nécessairement

$$(a) = -(d),$$

équation qui, traduite en langage ordinaire, signifie que *l'action exercée sur le conducteur* DD', *par les aimants extérieurs servant à créer le champ magnétique uniforme, est absolument la même que si le tube de fer* FF' *n'existait pas.*

ACTION EXERCÉE PAR LE TUBE DE FER SUR LE CIRCUIT CC'D'DC. — Il est facile de prouver que le tube de fer, transformé en aimant sous les influences combinées du champ uniforme extérieur et du champ créé par le courant CC'D'DC, exerce, sur ce dernier, une action mécanique de sens contraire à celle qui est due au champ extérieur et qui est, en outre, variable avec l'épaisseur du tube. Il suffit pour cela de détruire la solidarité que nous avions établie entre le tube de fer et le circuit mobile et de solidariser au contraire le circuit avec les aimants extérieurs ; le seul organe mobile est alors le tube FF'. On trouve ainsi, en mesurant la force qu'il faut lui appliquer pour le maintenir au repos malgré les actions auxquelles il est soumis, que cette force est très faible lorsque l'épaisseur de ses parois est elle-même très faible et qu'elle va en augmentant avec l'épaisseur des parois du tube jusqu'à devenir égale à la force qui est développée par le champ magnétique extérieur. Elle est d'ailleurs de signe contraire à celui de cette dernière et ne peut

Digitized by Google

la dépasser en valeur absolue, même lorsque les parois du tube sont très épaisses, pour des motifs que nous avons expliqué en parlant des écrans magnétiques (263).

410. — Conclusion. — La discussion qui précède prouve que :

1° Les aimants extérieurs servant à créer le champ magnétique dans lequel se déplace le circuit mobile, agissent sur les portions de ce circuit qui sont entourées de fer, absolument comme si le fer n'existait pas ;

2° L'enveloppe de fer transformée en aimant par les actions simultanées des aimants extérieurs et du circuit, développe sur ce dernier une action mécanique de sens contraire à celle des aimants extérieurs. Cette action est la même que si les aimants extérieurs n'existaient pas et que l'enveloppe de fer reçût, par un procédé quelconque, l'aimantation qu'elle prend sous leur influence.

Nous retrouverons bientôt ces deux lois en parlant de l'induction électro-magnétique et nous en tirerons alors toutes les conséquences qu'elles comportent.

§ 2. — TRAVAIL PRODUIT PAR LA ROTATION DE MASSES MAGNÉTIQUES AUTOUR D'UN COURANT.

411. — Travail produit par la rotation d'un pôle magnétique autour d'un courant rectiligne indéfini. — Soit C (fig. 207) la trace d'un courant rectiligne indéfini, d'intensité I, per-

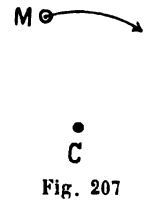

Fig. 207

pendiculaire au plan de la figure, et M un pôle magnétique contenant une quantité μ de magnétisme et assujetti à la condition

Digitized by Google

d'être à une distance constante de C autour duquel il peut tourner librement. L'effort tangentiel développé par le courant I sur le pôle M, a pour valeur (367)

$$\frac{2\mu I}{r};$$

r désignant la distance CM ; le travail développé pendant une rotation de M autour de C, est donc égal à

$$2\pi r \times \frac{2\mu I}{r} = 4\pi\mu I$$

Il est indépendant de la distance MC.

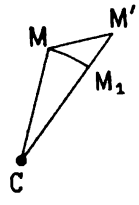

Fig. 208

Supposons maintenant que, au lieu de décrire un cercle, le pôle décrive une courbe quelconque ; et soit MM′ (fig. 208) un élément de cette courbe.

Joignons M et M′ au point C et décrivons, de ce point comme centre, un arc de cercle de rayon CM qui vient couper le rayon vecteur CM′ en M_1.

Amenons le pôle M d'abord en M_1 en lui faisant décrire l'arc de cercle MM_1 ; le travail développé a pour expression le produit de la force $\frac{2\mu I}{r}$ par le déplacement MM_1. Mais, en désignant par $d\theta$ l'angle MCM_1, et par r la distance MC, on a

$$MM_1 = r d\theta,$$

d'où il résulte que le travail accompli pendant le déplacement suivant MM_1 est égal à

$$2\mu I d\theta$$

Amenons maintenant le pôle de M_1 en M′ en lui faisant parcou-

Digitized by Google

rir l'élément rectiligne M_1M' qui passe par C. Le travail développé pendant ce déplacement est nul, parce que M_1M' est perpendiculaire à la direction de la force exercée sur le pôle par le conducteur C.

Le travail développé sur le pôle pendant qu'il passe d'une position M à une autre position infiniment voisine M', a donc pour valeur

$$2\mu I d\theta$$

et ne dépend que de l'angle que font entre eux les deux rayons vecteurs qui passent par les deux positions M et M'.

Par conséquent, si le pôle décrit une courbe fermée de forme quelconque, le travail développé pendant que le rayon vecteur qui le joint au point C, décrit un angle θ, a pour mesure

$$2\mu I\theta.$$

412. — Travail produit par la rotation d'un aimant autour d'un courant. — Le calcul précédent va nous permettre de trouver immédiatement le travail produit par la rotation d'un aimant matériel, en faisant disparaître le symbole abstrait auquel nous avons donné le nom de pôle. Supposons en effet que, au lieu d'une seule masse magnétique μ, nous en ayons plusieurs liées ensemble comme les molécules d'un corps solide, de façon que les angles décrits autour de C par les divers rayons vecteurs qui aboutissent à chacune d'elles, soient tous égaux entre eux. Le travail développé pendant que cet ensemble de masses magnétiques décrira autour du conducteur C une trajectoire quelconque, aura pour expression

$$2\mu I\theta + 2\mu' I\theta + 2\mu'' I\theta + \cdots = 2\theta I(\mu + \mu' + \mu'' + \cdots).$$

Mais la somme des termes $\mu + \mu' + \mu'' + \ldots$ est égale à la quantité totale de magnétisme contenue dans l'aimant, et cette somme algébrique est, comme nous le savons, égale à zéro, lorsqu'on considère les deux pôles. Donc, si un aimant se meut autour d'un courant rectiligne indéfini de façon que les rayons vecteurs, menés perpendiculairement de chaque molécule de l'aimant au conducteur, tournent d'angles égaux entre eux, le travail développé pendant ce mouvement sera constamment égal à zéro.

Si les angles décrits par les différents rayons vecteurs n'étaient pas constamment égaux entre eux, l'aimant pourrait, pendant cer-

Digitized by Google

taines portions de son déplacement total autour du conducteur, développer un travail, mais s'il partait d'une position et qu'il revînt l'occuper après avoir effectué une série de mouvements quelconques, le travail total développé serait algébriquement nul, pourvu, bien entendu, que le courant restât constant pendant tous ces déplacements.

Comme application de ce théorème, nous signalerons l'exemple suivant :

Un aimant AB (fig. 209) est lié en A à une manivelle AC dont le centre C est la projection du courant rectiligne indéfini sur le plan de la figure. L'autre extrémité B décrit une ligne droite passant par C de sorte que la force exercée par le courant C sur le pôle B, étant perpendiculaire à BC, ne produit aucun travail pendant le

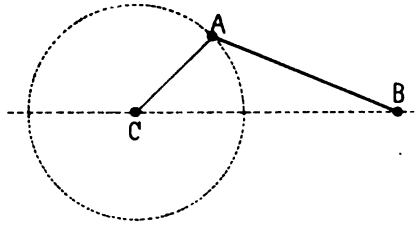

Fig. 209

mouvement rectiligne de B suivant la droite BC. L'action du courant sur l'extrémité A étant, au contraire, constamment perpendiculaire à AC, exerce sur la manivelle AC un effort tangentiel constant, de sorte qu'il semble que l'aimant doive développer pendant une rotation complète un travail égal à $4\pi\mu I$. Le théorème paraît donc en défaut. Mais il faut remarquer que l'aimant AB étant un corps solide, ne peut (comme cela devrait arriver nécessairement s'il effectuait un tour complet) traverser le conducteur C sans le couper ou sans être coupé par lui, ce qui est absolument contraire aux conditions que suppose le théorème. En outre, même quand l'aimant pourrait traverser le conducteur, grâce à des dispositions mécaniques permettant son passage *sans interruption ni modification du courant*, le travail développé après une révolution complète de la manivelle serait, non pas égal à $4\pi\mu I$, mais bien égal à zéro, parce que pendant

Digitized by Google

le passage de l'aimant dans la région où il coupe géométriquement le conducteur C, il développe un travail égal et de signe contraire à celui qui a été produit pendant le reste de la révolution.

§ 3. — TRAVAIL PRODUIT PENDANT LA ROTATION D'UN COURANT AUTOUR DE MASSES MAGNÉTIQUES.

413. — Travail produit pendant la rotation d'un courant autour d'un pôle magnétique. — Supposons d'abord que l'axe de rotation MA (fig. 210) de l'élément de courant CC′, passe par le pôle magnétique M, et cherchons la valeur du travail développé pendant un tour complet. Nous allons appliquer, pour cela, le théorème du flux de force coupé démontré précédemment (404).

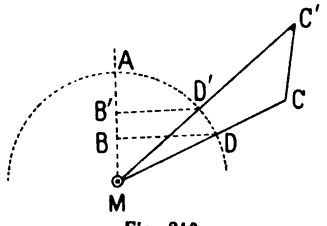

Fig. 210

Le flux coupé par l'élément CC′ pendant une révolution complète autour de AM, a pour mesure (Théorème de Green) le produit de la quantité μ de magnétisme contenue dans le pôle M, par la surface de la zône découpée par les rayons vecteurs MC, MC′, sur la sphère décrite du point M comme centre avec un rayon égal à l'unité. Cette surface a pour valeur $2\pi \times \overline{BB'}$, B et B′ étant les projections sur MA des points d'intersection des rayons vecteurs MC, MC′ avec la circonférence MD de rayon 1. On a donc

Flux de force coupé pendant une révolution de $CC' = 2\pi\mu . \overline{BB'}$.

Travail produit pendant une révolution $= 2\pi\mu I . \overline{BB'}$.

Nous allons appliquer cette formule à trois exemples.

Premier exemple. — Supposons d'abord que le courant CC′ soit rectiligne, indéfini et parallèle à l'axe MA. Alors il est facile de

Digitized by Google

voir que les deux rayons vecteurs MC′ et MC se confondent : le premier avec MA, le second avec le prolongement de MA en dessous de M, de sorte que la valeur de $\overline{BB'}$ deviendra précisément égale à deux fois le rayon de la sphère c'est-à-dire à 2. Le travail produit pendant une révolution de ce courant rectiligne indéfini qui tourne autour de M en restant parallèle à MA, est donc égal à

$$2\pi\mu I \times 2 = 4\pi\mu I.$$

C'est précisément l'expression que nous venons de trouver pour la valeur du travail développé par la rotation du pôle M autour d'un courant rectiligne indéfini (411) supposé fixe, et il est évident qu'il en doit être ainsi puisque le travail développé ne dépend que du mouvement relatif du pôle et du courant, et non de leur mouvement absolu. Il doit donc être le même lorsque le pôle décrit une révolution autour du courant ou lorsque le courant décrit une révolution autour du pôle.

SECOND EXEMPLE. — Supposons que le conducteur mobile ait la forme d'une courbe fermée $CC_1C'C_2C$ (fig. 211), parcourue par un courant d'intensité I dont le sens est indiqué par les deux flèches comprises entre CC_1C' et $C'C_2C$.

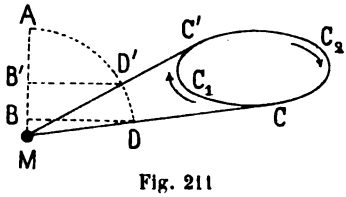

Fig. 211

Menons par le pôle M les rayons vecteurs MC, MC′, respectivement tangents en C et en C′ à la courbe formée par le conducteur, et évaluons le travail développé pendant une rotation complète de ce conducteur autour de l'axe MA, en le considérant comme égal à la somme des travaux développés par les deux portions CC_1C' et CC_2C'. Pour cela, faisons les mêmes constructions que dans la figure 210 et nous trouverons

Travail produit pendant une révolution de la portion $CC_1C' = 2\pi\mu I.\overline{BB'}$.

Travail produit pendant une révolution de la portion $CC_2C' = 2\pi\mu I.\overline{BB'}$.

Digitized by Google

Ces deux travaux sont donc égaux en valeur absolue, mais ils sont de signe contraire, parce que le courant se propage de C vers C′ dans la première portion, tandis qu'il se propage de C′ vers C dans la seconde, c'est-à-dire en sens contraire. Leur somme algébrique est donc nulle ; d'où le théorème suivant :

Le travail développé pendant une révolution d'un circuit fermé, de forme quelconque, autour d'un pôle magnétique, est égal à zéro.

Ce théorème peut se démontrer immédiatement si l'on se sert de l'expression du travail qui contient le flux de force embrassé par le circuit. En effet, lorsque le circuit mobile revient, après une révolution complète, à la position qu'il occupait primitivement, le flux total de force magnétique, dû au pôle M, qui est contenu dans son périmètre, reprend nécessairement la même valeur. Le travail mécanique développé par le déplacement du circuit, ayant pour expression le produit de l'intensité du courant par la *variation* du flux de force embrassé dans son périmètre (405), est donc nécessairement nul.

Il semble donc qu'il était inutile de chercher une autre démonstration et que celle que nous avons donnée n'a pas d'intérêt. Nous allons bientôt voir qu'elle permet, au contraire, d'expliquer certains phénomènes d'apparence paradoxale, beaucoup plus facilement que le théorème du flux de force embrassé.

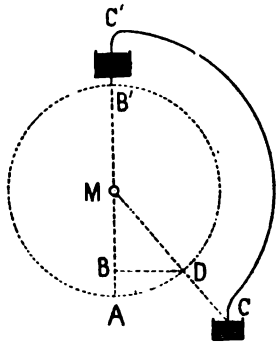

Fig. 212

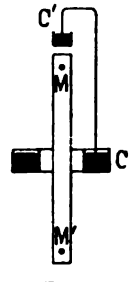

Fig. 213

Troisième exemple. — Soit CC′ (fig. 212) une courbe non fermée parcourne par un courant qui entre en C et sort en C′ par un point situé sur l'axe de rotation.

Digitized by Google

La communication entre les conducteurs fixes qui amènent le courant, et la courbe mobile CC′, est obtenue par l'emploi de godets remplis de mercure, de façon à supprimer presque totalement le frottement. Du pôle M comme centre, avec un rayon MD égal à l'unité, décrivons une circonférence et faisons les mêmes constructions géométriques que dans les exemples précédents ; nous aurons, pour la valeur du travail développé pendant un tour du conducteur mobile

$$2\pi\mu I \times \overline{BB'}.$$

Si l'extrémité C se trouvait aussi sur l'axe de rotation, on aurait $\overline{BB'} = 2\overline{MA} = 2$, et le travail deviendrait égal à $4\pi\mu I$ c'est-à-dire au travail développé par la rotation d'un pôle autour d'un conducteur rectiligne indéfini.

La figure 213 montre comment on réalise expérimentalement la rotation d'un conducteur mobile sous l'influence d'un des pôles M d'un aimant droit MM′. Le courant entre dans le conducteur mobile par le godet mercuriel C′ situé sur la verticale qui passe par les pôles M et M′ de l'aimant et autour de laquelle s'effectue la rotation ; puis il sort par le godet C qui a la forme d'un petit canal circulaire entourant complètement l'aimant et situé un peu au-dessus du point neutre de ce dernier.

En se servant d'un aimant, on introduit un second pôle M′ de signe contraire au premier et il est nécessaire de rechercher si son action ne contrarie pas celle du pôle M.

La plupart des auteurs disent à ce sujet que le second pôle pouvant être très éloigné du pôle M, son action est négligeable. Cette raison n'est pas suffisante, car nous avons vu dans le second exemple que les portions du conducteur fermé $CC_1C'C_2C$ situées dans la région CC_2C', donnaient lieu à des actions mécaniques qui équilibraient exactement celles de la région CC_1C', et cette dernière est cependant beaucoup plus rapprochée du pôle M.

La véritable raison pour laquelle le pôle M′ n'exerce sur le circuit mobile CC′ (fig. 213) qu'une action négligeable, c'est qu'il est *extérieur* à la surface engendrée par la rotation de ce circuit, tandis que le pôle M est, au contraire, *intérieur* à cette même surface.

Digitized by Google

Le travail négatif développé par le pôle M, est d'ailleurs facile à évaluer rigoureusement. Décrivons du point M′ (fig. 214) comme centre une circonférence de rayon M′B = 1 ; joignons M′ à l'extrémité C du conducteur mobile CC′, et projetons en D′, sur la ligne des pôles, l'intersection D de M′C avec la circonférence de rayon 1.

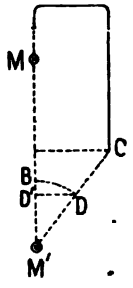

Fig. 214

Il est facile de voir, en appliquant les raisonnements exposés plus haut, que le travail développé pendant un tour, par l'action du pôle M′, a pour mesure $2\pi\mu I \times BD'$. Il est donc d'autant plus petit que l'extrémité C du conducteur mobile est plus rapprochée de l'axe polaire.

414. — Extension des théorèmes précédents au cas où le nombre des masses magnétiques actives est quelconque. — Lorsque le circuit mobile est soumis à l'action d'un aimant permanent, il n'est pas toujours permis de considérer cet aimant comme se réduisant à deux pôles ; c'est, en effet, une simplification que l'on ne peut accepter que si l'aimant est très long par rapport à ses dimensions transversales. Il faut alors avoir recours au théorème général qui permet d'exprimer le travail en fonction du flux de force magnétique coupé par le circuit mobile, en ayant soin de séparer les flux de force en deux groupes distincts : ceux qui émanent de masses magnétiques situées à l'intérieur de la surface engendrée par la rotation du circuit mobile, et ceux qui émanent de masses magnétiques situées à l'extérieur de cette même surface. Les premiers ne sont coupés qu'une seule fois par le circuit à chacune de ses révo-

Digitized by Google

lutions ; le travail mécanique engendré, pendant qu'ils sont ainsi traversés par le circuit, n'est donc développé, pour chacun d'eux, qu'une seule fois par tour. Il n'en est pas de même des canaux de force qui émanent de masses magnétiques extérieures à la surface décrite par le circuit mobile ; chacun d'eux, en effet, la traverse nécessairement deux fois, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, et il en résulte que le travail mécanique produit par le circuit mobile au moment où il coupe un de ces canaux de force, a lieu deux fois par tour et qu'il est affecté de signes contraires. Ce travail a d'ailleurs la même valeur absolue $Id\mathcal{F}$ (404) dans les deux passages successifs. Le travail mécanique produit dans un tour entier du circuit, sous l'influence des masses magnétiques extérieures, est donc nul.

Il y a toutefois une exception à cette règle ; il peut arriver en effet que les canaux de force émanés de masses extérieures pénètrent directement à l'intérieur de la surface sans la traverser. C'est ce qui a lieu dans le cas actuel, car la surface engendrée par le circuit mobile, doit nécessairement présenter une ouverture pour laisser passer l'aimant dont un des pôles doit être situé à l'extérieur.

Ainsi, dans la disposition représentée par la figure 212, la surface engendrée par le circuit mobile (qui est un arc de cercle plus petit qu'une demi-circonférence) est une sphère qui présente à la partie inférieure une ouverture circulaire dont le rayon est $\overline{AC}$.

Cette ouverture laisse passer : 1° des canaux de force émanés de toutes les masses magnétiques intérieures et qui, n'étant pas coupés par le circuit mobile, ne donnent lieu à la production d'aucun travail ; 2° des canaux de force émanés des masses extérieures et qui ne coupent la sphère qu'à leur passage de l'intérieur à l'extérieur de cette sphère ; ils donnent lieu à la production d'un travail qui est de signe contraire à celui qui est dû à l'action des masses intérieures, puisque le magnétisme libre de la portion de l'aimant qui sort de la sphère, est de signe contraire à celui de la portion intérieure.

En désignant par $\mathcal{F}$ le flux total émis par la portion de l'aimant intérieure à la sphère ; par k la fraction de ce flux qui sort par l'ouverture circulaire, le flux coupé par le circuit mobile, pendant un

Digitized by Google

tour, a pour valeur $(1-k)\mathfrak{F}$, et le travail moteur développé pendant ce tour, a pour mesure $(1-k)\mathfrak{F}\mathrm{I}$. Mais, pour obtenir le travail disponible, il faut retrancher de là le travail négatif dû au flux de force f' qui, émané de la région de l'aimant extérieure au circuit, passe par l'ouverture inférieure. Ce travail a pour expression $f'\mathrm{I}$, de sorte qu'il reste, pour le travail disponible

$$\left[(1-k)\mathfrak{F}-f'\right]\mathrm{I}.$$

415. — Réalisation expérimentale de la rotation d'un courant sous l'influence d'un aimant. — Les figures 215 et 216 montrent comment on réalise expérimentalement la rotation d'un courant au moyen d'un aimant.

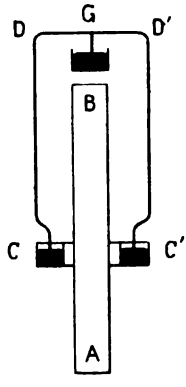

Fig. 215

Dans la figure 215, l'aimant AB est fixe ; le courant arrive par le godet mercuriel G et se divise entre les deux conducteurs mobiles GDC, GD'C', pour rejoindre le second contact mercuriel CC'.

Lorsque le courant passe, l'équipage mobile tourne autour du pivot d'acier à pointe très fine qui est supporté par le godet G et, comme il n'a à vaincre que des frottements extrêmement faibles, il semble que sa vitesse devrait s'accroître indéfiniment. Mais pour des motifs que nous verrons bientôt, il n'en est rien et sa vitesse tend vers une limite que nous apprendrons à calculer.

Digitized by Google

La figure 216 représente un autre dispositif dans lequel l'expérience revêt un caractère paradoxal, en ce sens qu'elle paraît contraire au principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

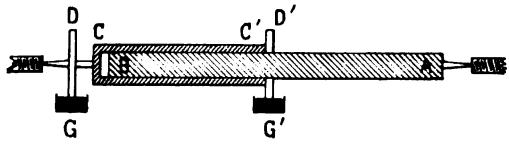

Fig. 216

Le conducteur CC' prend la forme d'un tube de cuivre qui recouvre complètement l'une des moitiés de l'aimant BA de forme cylindrique. Ce tube fait corps avec l'aimant et reçoit le courant au moyen de deux petits disques en cuivre nickelé D et D' qui trempent dans du mercure contenu dans les godets G et G'. Tout l'ensemble, mobile autour de deux pointes d'acier situées dans le prolongement de l'axe de l'aimant, entre en rotation dès qu'on lance le courant et serait capable de produire un travail mécanique. Ce qui constitue le côté paradoxal de cette expérience, c'est que les deux pièces entre lesquelles s'exerce l'action motrice, l'aimant et le conducteur, sont solidaires et que par conséquent, il semble impossible que les actions mutuelles qui s'exercent entre elles puissent donner un travail extérieur. Cela est impossible, en effet, et on est nécessairement amené à affirmer l'existence d'une force extérieure qui agit sur l'aimant BA. Or, cette force extérieure, c'est la résultante de toutes les actions exercées par les portions du circuit, autres que celle qui est liée à l'aimant et tourne avec lui. Nous avons vu, en effet, (413, SECOND EXEMPLE) que la résultante des forces dues à l'ensemble du circuit fermé, est nulle ; on conclut de là qu'une portion quelconque du circuit, exerce sur l'aimant, une action égale et de signe contraire à celle de tout le reste du circuit. Donc, si on solidarise ladite portion avec l'aimant (ce qui est une manière d'annuler son action sur lui), on rendra apparente l'action exercée par le reste du circuit et l'aimant entrera en rotation.

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — Supposons que l'aimant AB soit un électro-

Digitized by Google

aimant dont chaque moitié émet un flux total de 100 000 unités, et que le courant qui traverse le conducteur mobile soit de 100 ampères ou 10 unités C.G.S. ; le travail développé par tour, aura pour valeur, si on néglige la fraction k et le flux f, ce qui est en général permis,

$$\mathcal{T} = 100\,000 \times 10 = 1\,000\,000 \text{ d'ergs}$$

soit un peu plus de $\frac{1}{100}$ de kilogrammètre.

§ 4. — POTENTIEL MAGNÉTIQUE D'UN COURANT FERMÉ.

416. — Équivalence d'un courant fermé et d'un feuillet magnétique. — On appelle potentiel magnétique d'un courant fermé, la valeur du travail développé par ce courant sur un pôle magnétique qui, situé d'abord à une distance du circuit fermé, très grande par rapport aux dimensions de ce dernier, s'en approcherait graduellement de manière à venir occuper une position déterminée.

Pour trouver la valeur du travail développé, nous allons nous servir du théorème du flux de force embrassé par le circuit. Dans la première position du pôle magnétique, le circuit, de surface infiniment petite ds, étant à une distance infiniment grande du pôle, embrasse un flux total de force égal à zéro.

Dans sa seconde position M (fig. 217), le pôle magnétique se trouve à une distance $MO = r$ du milieu O du circuit CC′, et le flux de force reçu par la surface de CC′, a pour valeur, d'après le théorème de Green

$$\mu \frac{ds \cos \theta}{r^2},$$

expression dans laquelle μ désigne la masse magnétique du pôle M ; θ, l'angle du rayon vecteur OM avec la normale à l'élément de surface ds ; et r la longueur OM.

Le travail développé, en supposant que le circuit soit mobile et que le pôle soit fixe, est évidemment le même que lorsque le circuit est fixe et le pôle mobile, les positions relatives initiales et finales du pôle et du circuit étant, bien entendu, supposées les mêmes. Or, lorsque le circuit est mobile, le travail qu'il développe pendant son

Digitized by Google

déplacement, est égal au produit de l'intensité I du courant par la variation du flux de force magnétique enfermé dans son périmètre, soit :

$$I\left(\mu \frac{ds \cos \theta}{r^2}\right).$$

le flux de force ayant zéro pour valeur initiale.

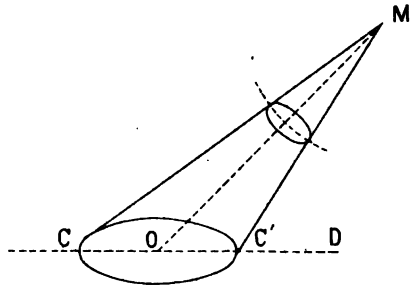

Fig. 217

Donc, le travail développé par la masse magnétique μ, lorsqu'on la suppose mobile et que le circuit CC' est fixe, est représenté par cette même expression dans laquelle il suffit de faire $\mu = 1$ pour avoir la valeur de ce qu'on appelle le potentiel magnétique du circuit CC'. On obtient ainsi

$$\textit{Potentiel du circuit } CC' = I \frac{ds \cos \theta}{r^2}.$$

Mais, nous avons vu (234) que le potentiel d'un feuillet magnétique de puissance Φ et de surface ds, a pour expression

$$\Phi \frac{ds \cos \theta}{r^2},$$

θ et r désignant les mêmes quantités que dans le problème actuel. Ces deux valeurs seront égales, quelle que soit la position du pôle M, si on a $\Phi = I$, c'est-à-dire si la puissance du feuillet magnétique est représentée par le même nombre que l'intensité du courant.

417. — Nous retrouvons ainsi l'équivalence que nous avons déjà constatée dans plusieurs cas particuliers, entre un circuit électrique fermé et un feuillet magnétique. Mais, nous allons voir maintenant

Digitized by Google

que cette équivalence est absolument complète[1], et que tous les effets mécaniques auxquels peut donner lieu un circuit électrique filiforme, lorsqu'il agit sur un système d'aimants, peuvent être rigoureusement reproduits par un feuillet magnétique limité par un contour identique à celui du circuit fermé, pourvu que l'on satisfasse à l'égalité

$$\Phi = I.$$

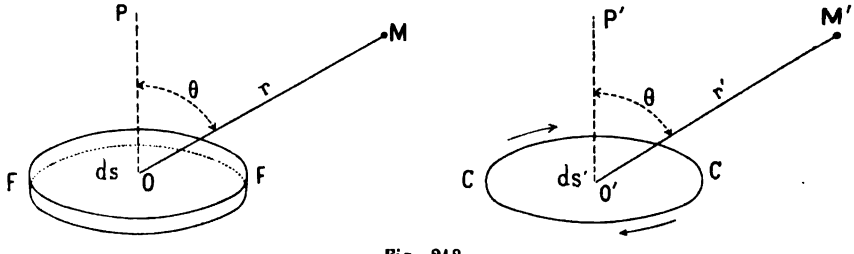

Fig. 218

Considérons, en effet (fig. 218), un feuillet magnétique FF et un courant fermé CC, tous deux infiniment petits, de forme identique, et satisfaisant à la relation $\Phi = I$, et supposons que la masse magnétique $M = 1$ occupe, par rapport à FF, une situation identique à celle de la masse $M' = 1$ par rapport à CC, c'est-à-dire que l'on ait

$$\overline{OM} = \overline{O'M'}$$

et

$$\widehat{MOP} = \widehat{M'O'P'}$$

OP et O'P' étant les normales élevées respectivement en O et en O' au feuillet et au circuit. Le point M fait partie d'une surface équipotentielle dont tous les points satisfont à la relation

$$\frac{\Phi ds \cos\theta}{r^2} = \text{constante}$$

et nous savons que si l'on fait glisser la masse-unité sur cette surface, la force, qui lui est appliquée par FF, est constamment normale

(1) A la condition, toutefois, que la masse magnétique ne pénètre pas à l'intérieur du circuit ou entre les deux faces du feuillet, car alors, l'équivalence des feuillets et des circuits n'existe plus, comme nous le démontrerons plus loin.

Digitized by Google

à ladite surface et qu'elle a pour valeur $\frac{dV}{dn}$ (203), dV étant l'accroissement du potentiel qui correspond à un déplacement de longueur dn, de la masse magnétique, dans le sens de la normale à la surface équipotentielle.

Or, lorsque l'égalité $\Phi = I$ est satisfaite, toute valeur donnée au potentiel détermine, pour le feuillet magnétique et pour le circuit électrique, deux surfaces équipotentielles identiques ; il résulte de là que la force appliquée à la masse-unité, soit par le feuillet lorsqu'elle est en M, soit par le circuit lorsqu'elle est en M′, a la même valeur dans les deux cas, si M et M′ ont, comme nous l'avons supposé, des coordonnées identiques, l'origine des coordonnées de M étant en O, et celle des coordonnées de M′ en O′.

418. — Décomposition d'un circuit fermé en une infinité d'autres produisant la même action totale. — Soit un circuit fermé plan AB....JA (fig. 219). Menons dans son plan une série de droites parallèles horizontales et équidistantes telles que AE, JF, et une série de droites verticales BI, CH, DG. Ces deux systèmes de droites divisent l'aire enfermée dans le circuit en une série de

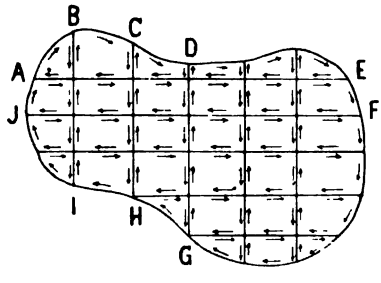

Fig. 219

carrés égaux dont la somme totale diffère d'autant moins de l'aire du circuit, que leur nombre est plus grand. Supposons que les quatre côtés de chacun de ces carrés soient électriquement isolés des côtés des carrés adjacents, de façon que l'on puisse y faire passer un courant électrique individuel qui transformera chaque carré en un circuit fermé complètement indépendant des circuits qui le touchent

Digitized by Google

géométriquement. Ces courants idéaux que nous supposerons égaux entre eux, sont représentés sur la figure par des flèches placées à l'intérieur des carrés auxquels elles se rapportent. Tous ces courants fermés, tournant dans le même sens, on voit immédiatement que deux côtés adjacents appartenant à deux carrés consécutifs, seront parcourus par des courants égaux et contraires occupant géométriquement la même situation dans l'espace. Si cet espace est un champ magnétique, il exercera sur lesdits côtés des efforts qui se détruiront puisqu'on suppose les carrés mécaniquement solidaires les uns des autres. Toutefois, ce raisonnement n'est pas applicable aux carrés incomplets dont un ou deux des côtés sont remplacés par une portion du circuit fermé telle que AB, BC, CD, ... Il est facile de voir que pour ceux-là, l'action du champ magnétique sur le courant n'est entièrement annulée que sur la portion rectiligne de leur périmètre, mais qu'elle reste entière sur les portions curvilignes AB, BC, CD, ... de sorte que l'action totale exercée sur l'ensemble de ces carrés se réduit à celle qui est exercée sur le contour fermé AB....JA. L'artifice que nous venons de décrire, ne change donc rien à la grandeur ou à la répartition des forces appliquées au contour curviligne matériel ABC....JA. Le raisonnement que nous venons d'exposer est toujours rigoureusement exact, même quand on remplace la division en carrés réguliers par un autre mode de division de la surface en figures irrégulières de formes absolument quelconques.

Supposons maintenant que les circuits élémentaires dont l'ensemble équivaut au circuit ABC....JA, soient infiniment petits ; nous pourrons, d'après le théorème démontré au numéro précédent, remplacer un quelconque d'entre eux par un feuillet magnétique de même forme satisfaisant à la relation

$$\Phi = I$$

et l'action mécanique exercée sur ce feuillet par les masses magnétiques environnantes, sera exactement égale à celle qui était exercée sur le circuit élémentaire. En appliquant cette substitution à chacun des circuits élémentaires, nous aurons finalement éliminé

Digitized by Google

complètement le circuit électrique qui sera remplacé par un feuillet magnétique de puissance uniforme

$$\Phi = I$$

et nous serons certains que le système de forces appliquées par les masses magnétiques extérieures à ce feuillet, *considéré comme un corps solide*, sera exactement équivalent à celui des forces qui étaient appliquées au circuit filiforme considéré aussi comme un corps solide.

419. — Nous disons à dessein « les actions exercées par les masses magnétiques extérieures », et non « les actions exercées par le champ magnétique », comme on le dit habituellement dans la plupart des ouvrages, parce que cette dernière expression est dangereuse et conduit facilement à des conclusions absolument contraires à la réalité. Quelques développements à cet égard nous paraissent nécessaires. Si on lit avec attention les raisonnements que nous venons d'exposer, on remarquera que nous avons remplacé les actions exercées réellement sur le circuit matériel AB...JA, par d'autres qui seraient exercées sur une collection d'aimants égaux dont la réunion constitue ce qu'on appelle un feuillet magnétique. Ces aimants occupent, dans l'espace, des positions absolument différentes de celles où se trouvent les portions du circuit électrique soumises aux actions mécaniques qu'il s'agit de calculer ; ils peuvent même en être extrêmement éloignés. Les forces qui agissent sur eux n'ont aucun rapport simple avec celles qui sont réellement appliquées aux différentes portions du circuit, et cependant l'*action totale* exercée sur ces deux systèmes, l'un magnétique, l'autre électrique, est rigoureusement la même.

420. — Ce beau théorème qui a été découvert par Ampère, a donc pour but de remplacer une intégrale définie par une autre dont l'origine est absolument différente ; mais il n'est possible que parce que les forces qui agissent sur un élément du feuillet, même très éloigné du contour AB...JA, ont un rapport intime avec celles qui agissent sur ce contour. En effet, le *champ magnétique* est, en

Digitized by Google

chaque point de l'espace, déterminé par la résultante des actions émanées de masses matérielles dont il est impossible de modifier le nombre ou les positions relatives, sans le modifier lui-même *dans toute son étendue*. Par conséquent, tout changement, si léger qu'il soit, apporté à la grandeur ou à la position d'une seule de ces masses matérielles, a pour conséquence immédiate de modifier la grandeur et la direction du champ, non seulement dans les points de l'espace où se trouve le circuit électrique, mais aussi dans toute l'étendue du feuillet.

Il résulte de là que les éléments qui définissent complètement un champ magnétique en un point de l'espace, ne sont nullement indépendants de ceux qui le caractérisent en un point voisin ou éloigné. Cette relation intime entre les valeurs du champ en différents points de l'espace, n'a plus aucun caractère d'évidence quand on perd de vue l'origine matérielle de ce champ. Il semble alors tout naturel que l'on puisse assigner à son intensité et à sa direction des valeurs arbitraires en respectant la seule loi de continuité. On arriverait ainsi à lui donner, dans la région occupée par le circuit, la valeur qu'il a réellement, tandis qu'il aurait des valeurs arbitraires dans les régions intérieures à ce circuit occupées par le feuillet magnétique. L'action totale exercée sur ce dernier, pourrait donc varier dans des limites très étendues, tandis que celle exercée sur le circuit resterait invariable, ce qui est contraire au théorème que nous venons de démontrer.

421. — Différence entre le potentiel d'un feuillet magnétique et celui d'un circuit fermé. — On vient de voir que le potentiel d'un feuillet magnétique et celui d'un circuit fermé ont la même valeur, pourvu que leur contour soit identique et que l'on satisfasse à la relation $\Phi = I$. Toutefois, cette identité d'effets cesse d'exister lorsqu'on suppose que la masse-unité pénètre entre les deux faces du feuillet. Dans ce cas, en effet, la force qui la sollicite change de signe, tandis que cela n'a pas lieu quand on remplace le feuillet magnétique par un circuit électrique fermé. Nous avons déjà donné (235) l'expression du travail pro-

Digitized by Google

duit par la masse-unité lorsqu'elle quitte l'une des faces AA′ d'un feuillet magnétique chargée d'une certaine quantité de magnétisme de même signe qu'elle, pour se rendre à l'autre face BB′, et nous avons trouvé que le travail total produit, lorsque le trajet suivi

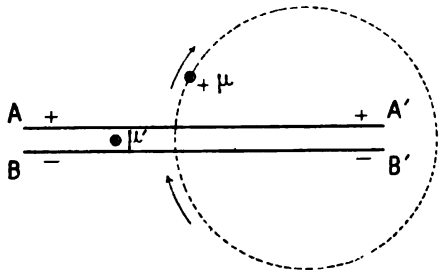

Fig. 220

(fig. 220) est entièrement extérieur au feuillet, a pour valeur $4\pi\Phi$. Si, au lieu de suivre ce chemin détourné, la masse-unité μ' passe directement de AA′ à BB′, c'est-à-dire si elle se meut en sens contraire des flèches indicatrices du déplacement précédent, il est facile de démontrer que le travail a encore pour valeur $4\pi\Phi$; mais il est de signe contraire au travail développé dans le premier trajet. Par conséquent, si la masse-unité partait d'une position quelconque μ en se mouvant dans le sens de la flèche, si elle décrivait la trajectoire extérieure et si enfin, au lieu de s'arrêter à la face BB′, elle la traversait en se mouvant toujours dans le même sens de manière à traverser ensuite AA′ pour revenir à son point de départ μ, le travail mécanique total développé après qu'elle aurait décrit ce cycle, aurait pour valeur zéro.

Il n'en est pas ainsi lorsqu'on remplace le feuillet par un circuit électrique. Nous avons déjà montré (371) qu'un pôle magnétique situé sur une droite passant par le centre d'un courant circulaire et perpendiculaire à son plan, est sollicité par une force dont le signe reste le même lorsque le pôle se déplace le long de la droite depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Si donc la masse-unité μ décrivait un cycle complet ABDOA (fig. 221) comme nous venons de le supposer pour le feuillet, le travail développé aurait une valeur égale à celle qui

Digitized by Google

correspond au trajet extérieur seul, lorsqu'il s'agit d'un feuillet magnétique équivalent au circuit électrique, soit (en tenant compte de la relation $\Phi = I$), $4\pi I$. Cette valeur est d'ailleurs indépendante de la position du point d'intersection O du cycle avec le plan du courant, pourvu que O soit situé à l'intérieur du courant CC'.

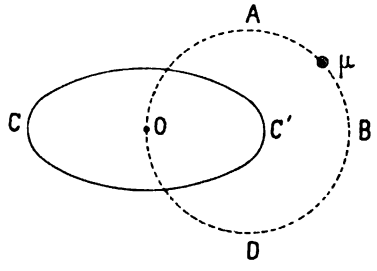

Fig. 221

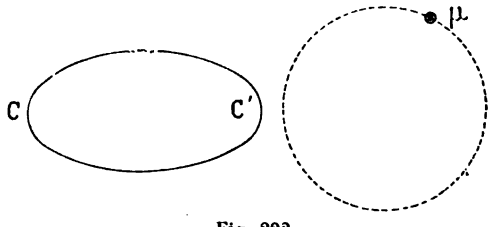

Fig. 222

Si le cycle décrit était entièrement extérieur au courant (fig. 222), le travail deviendrait nul, comme dans le cas du feuillet magnétique.

Cette valeur $4\pi I$ est précisément égale à celle du travail développé par la masse-unité lorsqu'elle décrit un cycle fermé autour d'un courant rectiligne indéfini (411).

La discussion à laquelle nous venons de nous livrer montre que, tandis qu'un feuillet magnétique possède un potentiel parfaitement défini et égal à $4\pi\Phi$, un courant fermé n'a pas de potentiel rigoureusement déterminé parce que la masse-unité magnétique peut accomplir, en passant d'une position à une autre, un travail aussi grand qu'on voudra, à la seule condition de l'amener de la première position à la seconde, en lui faisant traverser un certain nombre de fois, dans le même sens, l'aire embrassée par le courant.

Digitized by Google

CHAPITRE QUATRIÈME

AIMANTATION PRODUITE PAR LES COURANTS

§ 1. — PROPRIÉTÉS DES CIRCUITS FERMÉS QUI CONTIENNENT UN MÉTAL MAGNÉTIQUE.

422 — Aimantation produite par un courant rectiligne indéfini. — Un courant rectiligne filiforme indéfini est entouré d'un système de lignes de force constituées par des cercles dont le plan est perpendiculaire au conducteur et dont le centre est situé sur ce même conducteur. Soit C (fig. 223) la trace du conducteur sur le plan de

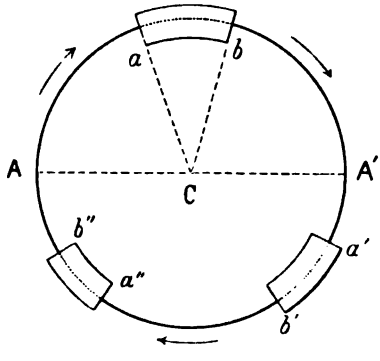

Fig. 223

la figure, et CA le rayon d'un de ces cercles sur la circonférence duquel nous plaçons des barreaux de fer tels que ab, $a'b'$, $a''b''$ de section et de longueur très petites par rapport à CA. Chacun de ces barreaux étant dirigé suivant la ligne de force du champ magnétique

Digitized by Google

dans lequel il se trouve, s'aimantera par induction et prendra un moment magnétique égal à $\varkappa \mathcal{H} s l$; $\varkappa$ désignant la susceptibilité magnétique qui correspond au champ d'intensité $\mathcal{H}$; s, la section du barreau et l sa longueur. Le champ magnétique d'un courant indéfini ayant pour valeur $\frac{2I}{r}$, (à une distance r du conducteur) le moment magnétique de chaque barreau sera exprimé par

$$2\varkappa s \frac{l}{r} I = 2\varkappa s \alpha I$$

α désignant l'angle $\widehat{aCb}$ sous-tendu par le barreau. Cette équation convient évidemment aux autres barreaux $a'b'$, $a''b''$, de sorte que si nous plaçons à la suite les uns des autres une série de barreaux identiques dont la longueur soit choisie de manière qu'ils ne laissent entre eux aucun intervalle, nous constituerons une circonférence entièrement métallique, formée d'aimants accolés par leurs pôles de nom contraire, et ne pouvant, par conséquent, exercer aucune action sur une masse magnétique extérieure ou intérieure.

Nous retombons ainsi sur un cas déjà traité (257).

423. — Aimantation d'un tube de fer au moyen d'un courant dirigé suivant son axe. — Soit AA' le diamètre du tube, (fig. 224) que nous supposerons assez grand par rapport à son épais-

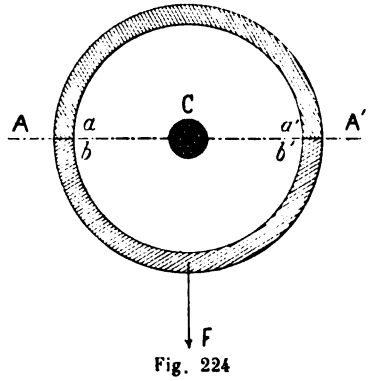

Fig. 224

seur, pour qu'on puisse considérer l'intensité $\frac{2I}{r}$ du champ magnétique produit par le conducteur C, comme constante dans toute l'épaisseur du tube.

Digitized by Google

D'après ce que nous venons de dire, toutes les molécules du tube prendront, pendant le passage du courant, un état magnétique qui ne se traduira par aucune action extérieure, mais dont on pourra cependant manifester l'existence en coupant le tube suivant un plan diamétral AA', et en cherchant l'effort F qu'il faut appliquer à l'une des moitiés du tube pour la séparer de l'autre. Nous avons vu (258) que l'intensité $\mathcal{H}$ du champ magnétique dont les lignes de force circulaires déterminent dans le fer l'aimantation induite $\varkappa\mathcal{H}$, est liée à l'effort F par l'équation

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\varkappa}\sqrt{\frac{F}{\pi s}}$$

qui, en remplaçant $\mathcal{H}$ par sa valeur $\frac{2I}{r}$, donne

$$F = 16\pi\varkappa^2 \frac{s}{r^2} I^2$$

dans laquelle s désigne le produit de l'épaisseur de la paroi du tube par la longueur de ce tube comptée perpendiculairement au plan de la figure. Le flux de force magnétique *total*, compté suivant la circonférence du tube, est égal à (251)

$$\mathcal{H}s + 4\pi\varkappa\mathcal{H}s = \frac{2Is}{r}(1 + 4\pi\varkappa) = 2\mu\frac{Is}{r}.$$

Exemple numérique. — Un tube de fer ayant 2 centimètres de diamètre moyen, 2 millimètres d'épaisseur et 10 centimètres de longueur, contient un conducteur qui se confond avec son axe et qui est traversé par un courant de 20 ampères ou 2 unités C. G. S. On demande le poids nécessaire pour séparer les deux moitiés du tube supposé scié longitudinalement suivant un plan diamétral.

La section s a pour valeur $0{,}2 \times 10 = 2$ centimètres carrés. L'intensité $\mathcal{H}$ du champ produit par le courant, à une distance du conducteur égale au rayon du tube, a pour valeur

$$\mathcal{H} = \frac{2I}{r} = 2 \times \frac{2}{1} = 4.$$

Or, la table des constantes d'aimantation (page 335) donne, pour $\mathcal{H} = 3{,}9$ une valeur de $\varkappa$ égale à 151. Nous admettrons donc pour $\mathcal{H} = 4$, une valeur de $\varkappa$ égale à 150 et nous aurons

$$F = 16\pi.\overline{150}^2 \times \frac{2}{\overline{1}^2} \times \overline{2}^2 = 9047700 \text{ dynes} \quad \text{ou} \quad 9^k{,}225.$$

Digitized by Google

Nous devons dire tout de suite qu'une expérience faite dans les conditions que nous venons d'indiquer, nous a donné un nombre très inférieur à celui que nous venons de trouver.

Cette divergence tient probablement à ce que le coefficient × est, pour les fers de qualité médiocre, avec lesquels on fait les tubes que l'on trouve dans le commerce, beaucoup plus petit (surtout pour les faibles valeurs de $\mathcal{H}$) que les nombres trouvés par M. Ewing pour des fers très doux ; or, comme le coefficient × intervient au carré dans la valeur de F, son influence est très considérable.

424. — Aimantation des diverses parties d'un circuit magnétique fermé. — Dispersion magnétique. — Nous avons vu (261) qu'un aimant est entouré d'un système de lignes de force tel que chaque canal de force est composé de deux parties, l'une intérieure, l'autre extérieure à l'aimant (fig. 225). Ces deux parties se rejoignent sur les deux faces du plan cc' élevé au centre de figure de l'aimant, normalement à son axe ; il en est de même de tous les autres canaux de force.

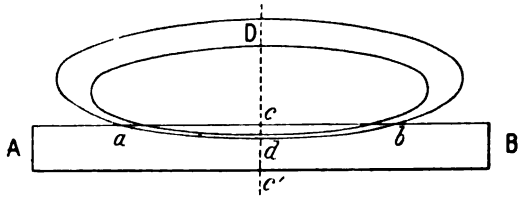

Fig. 225

Dans chacun de ces canaux, le flux de force (c'est-à-dire la force constante appliquée à un petit plan de surface égale à la section du canal, chargé d'une unité magnétique par cm²), a une direction tangente à celle du canal et une intensité constante ; mais la valeur de chaque flux de force est distincte de celle du flux de force voisin.

Tous ces flux de force forment un ensemble qu'on appelle le *flux de force total.*

Nous insistons sur tous ces faits afin que l'on sache bien que les formules dont nous allons nous servir dans la suite, ne sont pas rigoureusement exactes ; elles supposent, en effet, que tous les canaux de force sortent et entrent par les deux faces A et B et que les canaux tels que *adb*D n'existent pas.

Digitized by Google

Les canaux de force qui s'échappent ainsi dans l'air, sans sortir par la face terminale A de l'aimant, donnent lieu à ce qu'on appelle une *dispersion magnétique* (261).

Les formules employées dans la pratique, supposent, comme nous venons de le dire, que cette dispersion n'existe pas ou, tout au moins, qu'elle est négligeable.

425. — Analogie entre les canaux de force magnétiques et le flux électrique dans un milieu indéfini à trois dimensions. — Reprenons la figure précédente (fig. 225) et supposons que AB soit un corps très bon conducteur de l'électricité et qu'on ait intercalé en *d* une pile ; supposons enfin le tout plongé dans un liquide conducteur *ayant comme résistance spécifique l'unité*.

Le flux électrique, engendré par la pile, pourra être calculé, en chaque point du liquide, par la loi d'Ohm, et il est facile de comprendre que l'on puisse construire dans le liquide, une série de courbes équipotentielles.

La figure ainsi obtenue sera identique à celle des lignes de force du barreau aimanté que nous avons d'abord considéré ; cette similitude a fait dire que la même loi régissait ces deux phénomènes, mais, en réalité, ils n'ont rien de commun.

426. — On peut démontrer cette identité de forme par le calcul.

Si, en effet, on considère un tube de force (fig. 226) et le petit

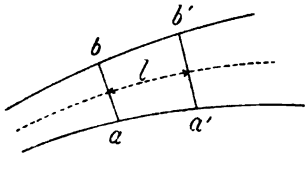

Fig. 226

plan *ab*, chargé de l'unité de quantité de magnétisme, qui l'engendre ; lorsque ce plan se déplace d'une longueur *l*, le travail effectué pendant ce déplacement, a pour expression

$$\mathfrak{T} = Fl,$$

Digitized by Google

F étant la force normale qui le sollicite ; mais ce travail est aussi égal à

$$V\mu,$$

V étant la différence de potentiel magnétique entre les deux positions ab, $a'b'$, du plan et μ la quantité de magnétisme dont il est chargé. Or, par définition

$$\mu = s,$$

s étant la surface du plan ; d'un autre côté d'après nos conventions, F n'est autre chose que le flux total de force du canal considéré, il vient donc, en le désignant par $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \frac{V}{\left(\frac{l}{s}\right)},$$

formule algébriquement identique à celle qui résulte de l'application de la loi d'Ohm au calcul du courant électrique qui traverserait l'élément de conducteur compris entre les parois du canal de force et les éléments ab, $a'b'$ découpés dans deux surfaces équipotentielles très voisines correspondant à deux potentiels électriques dont la différence serait V. La substance de ce conducteur devrait, bien entendu, avoir une résistance spécifique égale à 1.

Rappelons enfin que cette formule représente aussi le flux de force qui traverse l'intervalle des deux armatures d'un condensateur à lame d'air (130).

Mais, dans la question qui nous occupe, la formule

$$\mathcal{F} = \frac{V}{\left(\frac{l}{s}\right)}$$

n'est exacte que dans un cas seulement, celui où le circuit magnétique est formé par un anneau de fer de section constante et recouvert d'un enroulement uniforme (258, fig. 136) ; dans les autres cas, on ne peut l'appliquer que si l'intervalle d'air à franchir entre les deux épanouissements polaires, est très petit, et ces épanouissements eux-mêmes, de très grande surface.

Nous avons trouvé que le flux total dans un circuit hétérogène,

Digitized by Google

(259) a pour expression

$$\mathcal{F} = \frac{\mathfrak{M}}{\Sigma \frac{l}{\mu S}}.$$

Nous avons vu comment on calculait $\Sigma \frac{l}{\mu S}$. Nous allons indiquer maintenant comment on calcule la force magnéto-motrice.

427.— Calcul de la force magnéto-motrice. — D'après ce que nous avons dit, la force magnéto-motrice n'est pas autre chose que la différence de potentiel magnétique de deux points F et K (fig. 227) du champ magnétique dans lequel est plongée une portion d'un circuit magnétique tel que C.

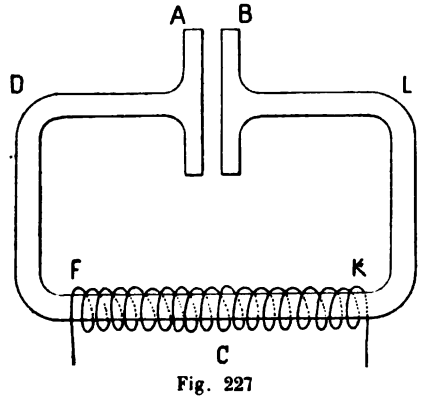

Fig. 227

Dans le cas de la figure 227, la force magnéto-motrice est produite par le solénoïde de longueur FK.

Comme le champ magnétique est alors égal à $4\pi n_1 I$ (402), la différence de potentiel magnétique produite par ce solénoïde, sera :

$$V = 4\pi n_1 I \times l,$$

n_1 étant le nombre de spires par unité de longueur et l la longueur du solénoïde.

Si on pose

$$N = n_1 l$$

N désignant le nombre total de spires, on aura pour la valeur de la force magnéto-motrice :

$$\mathfrak{M} = 4\pi NI$$

Digitized by Google

d'où l'on tire la valeur du flux total :

$$\mathcal{F} = \frac{4N\pi I}{\sum \frac{l}{\mu s}}.$$

§ 2. — APPLICATIONS.

428. — Valeur du champ magnétique et du flux total de force à l'intérieur d'un solénoïde enroulé sur un tore. — Soit ABDEA (fig. 228) une courbe fermée de forme quelconque qui, en tournant autour de l'axe YY′, engendre un tore ; sur ce tore, enroulons une série de spires situées dans des plans méridiens passant tous par YY′ et faisant entre eux des angles égaux. Si ces

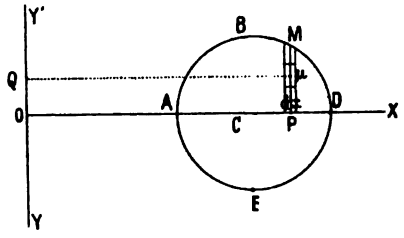

Fig. 228

spires sont parcourues par des courants égaux, le système électromagnétique que nous aurons ainsi créé, sera équivalent à une série de feuillets magnétiques se touchant par leurs faces de signes contraires et n'exerçant, par conséquent, aucune action sur une masse magnétique située en dehors du périmètre des spires. Nous allons calculer l'intensité du champ à l'intérieur de ce périmètre.

Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une seule spire ABDEA parcourue par le courant d'intensité I, et qu'une masse magnétique μ partant d'un point quelconque situé à l'intérieur du périmètre de cette spire, décrive un cercle ayant pour centre P et pour rayon $Q\mu$; (elle se meut donc comme la courbe ABDEA lorsque cette dernière engendre le tore). Quand elle sera revenue à sa position primitive après avoir fait un tour complet, elle aura engendré un travail

Digitized by Google

mécanique qui a pour valeur $4\pi\mu I$ (419 à 421). Si au lieu d'une seule spire, nous en avions un nombre égal à N, chacune d'elles produirait le même travail $4\pi\mu I$ pendant une révolution complète de la masse μ, puisque la valeur de ce travail est indépendante de la position initiale de la masse μ par rapport à la spire considérée. Le travail total produit par la masse sous l'influence des N spires parcourues toutes par le même courant, aura donc pour valeur $4\pi NI \times \mu$. Mais si ces spires sont équidistantes comme nous l'avons supposé, et extrêmement rapprochées, il est clair que la force f appliquée à la masse μ est constante pendant la durée d'une révolution de cette masse; la valeur de cette force s'obtient immédiatement en divisant le travail produit pendant un tour par le chemin parcouru pendant l'accomplissement de ce tour; or si nous appelons x la distance μQ de la masse μ à l'axe de révolution YY', le chemin parcouru pendant un tour a pour valeur $2\pi x$; la force f est donc donnée par l'expression

$$f = \frac{4\pi\mu NI}{2\pi x} = \frac{2\mu NI}{x},$$

Si la masse μ était égale à l'unité, la force f représenterait alors l'intensité du champ magnétique pour tous les points situés à la même distance x de YY'; en la désignant par h, on aurait donc

$$h = \frac{2NI}{x},$$

Si nous voulons trouver la valeur du flux de force qui traverse le rectangle de base infiniment petite dx et de hauteur infiniment petite dy, il suffira, d'après la définition même du flux de force, de multiplier l'aire $dx \times dy$ par l'intensité h du champ au point considéré; le flux de force élémentaire a donc pour expression

$$2NI\frac{dx.dy}{x}.$$

Si on considère, dans cette expression, dx et x comme constants, on pourra intégrer immédiatement cette expression par rapport à dy, de sorte que le flux qui traverse un rectangle infiniment petit limité au contour de la spire, ayant pour base dx et pour hauteur

Digitized by Google

MP $= y$, a pour valeur

$$2\mathrm{NI}\frac{ydx}{x};$$

dans cette expression, y est une fonction de x définie par la forme de la courbe qui constitue la spire.

Le flux total qui traverse chacune des spires a donc pour valeur

$$2\mathrm{NI}\int\frac{ydx}{x}.$$

Cette intégrale s'obtient facilement dans le cas où la spire ABDEA a la forme d'un rectangle, et l'on trouve, en désignant par a_1 et a_2 les distances respectives à YY′ des côtés du rectangle parallèles à cet axe et par b la longueur de chacun des deux autres côtés

$$\mathcal{F} = 2\mathrm{NI}b\log_e\frac{a_2}{a_1},$$

a_2 représentant la distance du côté le plus éloigné de YY′.

Si la spire ABDEA avait la forme d'une circonférence de rayon r dont le centre C serait à une distance R de YY′, on trouverait

$$\mathcal{F} = 2\mathrm{NI}[\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - r^2}].$$

Nous pouvons donner au coefficient 2NI une autre forme; si, en effet, nous désignons par n_1 le nombre de spires comprises entre deux plans méridiens faisant entre eux un angle égal à l'unité (57°,3), on a

$$\mathrm{N} = 2\pi n_1$$

et par suite

$$2\mathrm{NI} = 4\pi n_1 \mathrm{I}.$$

La formule générale donnée plus haut,

$$\mathcal{F} = 2\mathrm{NI}\int\frac{ydx}{x},$$

qui s'applique à un tore engendré par une figure de forme quelconque, paraît très différente de la formule

$$\mathcal{F} = \frac{4\pi\mathrm{NI}}{\left(\frac{l}{s}\right)},$$

qui convient au cas d'un solénoïde rectiligne de grande longueur.

Digitized by Google

Mais, nous allons montrer que ces formules sont identiques lorsque la figure qui engendre le tore, est petite par rapport à la distance de ses différents points de l'axe à révolution.

Reprenons la formule qui donne le flux de force dans l'élément de surface qui a pour base dx et pour hauteur dy,

$$\mathcal{F} = 2\text{NI}\,\frac{dxdy}{x}.$$

Nous pouvons l'écrire

$$\mathcal{F} = 4\pi\text{NI}\,\frac{dx.dy}{2\pi x}.$$

Mais $dx.dy$ est égal à la section s du rectangle que nous considérons cette fois comme constituant la figure génératrice du tore. D'autre part, $2\pi x$ est la valeur de la longueur de la circonférence décrite par le centre du rectangle $dxdy$ dans sa révolution autour de YY'; désignons-la par l, et la formule deviendra

$$\mathcal{F} = 4\pi\text{NI} \times \frac{s}{l} = \frac{4\pi\text{NI}}{\left(\frac{l}{s}\right)}.$$

On voit que cette formule est identique à celle qui convient au solénoïde rectiligne.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que le solénoïde était enroulé sur un tore ne contenant pas de fer. Dans le cas contraire, il faut multiplier la valeur du flux $\mathcal{F}$, calculé plus haut, par la perméabilité μ dont on prendra la valeur dans la table de la page 335, en fonction de celle du flux magnétique moyen à l'intérieur du tore lorsqu'il ne contient pas de fer.

429. — Valeur du champ magnétique et du flux total de force à l'intérieur d'un circuit hétérogène formé de fer et d'air. — Nous supposerons, pour pouvoir appliquer la formule

$$\mathcal{F} = \frac{4\pi\text{NI}}{\sum\frac{l}{\mu s}},$$

avec quelque exactitude, que la densité du flux magnétique dans le fer est petite ; nous aurons alors

$$\sum\frac{l}{\mu s} = \frac{l}{\mu s} + \frac{\delta}{\text{S}},$$

Digitized by Google

l étant la longueur du circuit magnétique dans le fer, s la section de ce fer, δ l'épaisseur de la couche d'air à traverser, S la section de cette couche d'air.

Si on admet que s est très grand par rapport à l, et que μ est également très grand, nous pourrons négliger la fraction

$$\frac{l}{\mu s}$$

et la formule simplifiée deviendra

$$\mathcal{F} = \frac{4\pi NI}{\frac{\delta}{S}},$$

ou

$$\frac{\mathcal{F}}{S} = \frac{4\pi NI}{\delta},$$

ou encore

$$4\pi NI = \frac{\mathcal{F}}{S}\delta = \mathcal{H}\delta,$$

formule dans laquelle $\mathcal{H}$ est le champ magnétique dans l'air et NI un produit qu'on appelle le nombre de *tours-ampères*.

Exemple numérique. — Supposons que, dans la figure précédente mise sous une forme pratique (fig. 229), nous ayons à produire un champ de

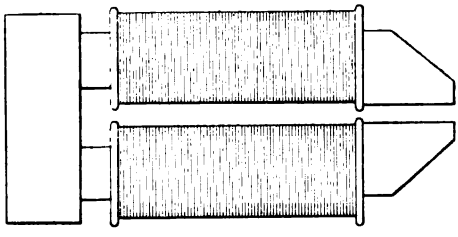

Fig. 229

1000 unités C. G. S. entre deux épanouissements carrés de 10 centimètres de côté et espacés de 1 centimètre.

Le flux total à produire sera

$$1000 \times 10^2 = 100000 \text{ unités C. G. S.}$$

Calcul de la section du fer. — Pour nous rapprocher de la formule que nous venons de trouver, où nous avons supposé μ très grand, nous prendrons

Digitized by Google

5000 unités C.G.S. pour valeur du flux dans le fer, μ sera alors voisin de 2000 (p. 335).

Le flux total étant de 100000 unités, la section du fer sera

$$s = \frac{100000}{5000} = 20^{cm^2},$$

soit un diamètre de $5^{cm},05$.

Calcul de l'enroulement. — En appliquant la formule, on trouve

$$4\pi NI = \frac{\mathcal{F}\delta}{S} = \frac{100000 \times 1}{100},$$

d'où

$$NI = 79,6 \quad \text{unités C.G.S.}$$

soit 80 en nombres ronds.

Pour avoir le nombre de tours-ampères, on multipliera 80 par 10, l'unité C.G.S. de courant étant 10 fois plus grande que l'ampère. Il faut donc 800 tours-ampères.

Remarque. — Si on doublait l'écartement des pièces polaires, il faudrait doubler le produit NI ; mais on arriverait à de grossières erreurs en continuant cette progression ; car il ne faut pas oublier qu'une des hypothèses que nous avons faites dans les formules, est que l'écartement δ des épanouissements polaires était très petit par rapport à leur surface.

§ 3. — COMPOSITION DES CHAMPS MAGNÉTIQUES.

430. — Champ magnétique créé par deux solénoïdes concentriques. — Nous allons examiner ce qui se passe quand, au lieu d'un seul solénoïde, on en a plusieurs de dimensions différentes agissant simultanément sur le même noyau de fer.

1er Cas. — Les deux solénoïdes sont très longs par rapport à leurs diamètres et sont enroulés parallèlement sur le même noyau de fer [1].

Le champ intérieur est égal alors à la somme des champs primitifs, il a pour valeur

$$\mathcal{H} = 4\pi(n_1 I + n'_1 I').$$

(1) On verra, dans le deuxième volume, l'importance de ce procédé d'enroulement, appliqué, pour la première fois, par M. Marcel Deprez en vue de faire varier automatiquement le champ magnétique d'une machine dynamo-électrique, de façon à rendre constante la différence de potentiel aux bornes de la machine.

Digitized by Google

2° Cas. — Les deux solénoïdes sont très courts, mais leur diamètre est très grand. *Dans ce cas, le champ n'est connu exactement qu'au centre.*

Si les deux solénoïdes sont concentriques et dans le même plan, le champ magnétique est égal à la somme des champs composants, c'est-à-dire égal à

$$\frac{2\pi nI}{r} + \frac{2\pi n'I'}{r'},$$

r et r' étant les rayons.

Si les deux solénoïdes, tout en restant concentriques, sont dans des plans faisant un angle α entre eux (fig. 230), on appliquera la loi du parallélogramme des forces, puisque, par définition, ce qu'on

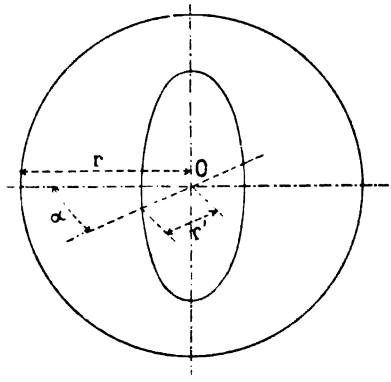

Fig. 230

appelle l'intensité d'un champ magnétique, n'est autre chose que la valeur de la force appliquée à l'unité de masse magnétique placée dans ce champ ; et on aura

$$\mathcal{H} = \sqrt{h^2 + h'^2 + 2hh'\cos\alpha},$$

formule dans laquelle h est le champ du premier solénoïde et a pour valeur

$$h = \frac{2\pi nI}{r},$$

et h' le champ créé par le deuxième solénoïde

$$h' = \frac{2\pi n'I'}{r'},$$

Digitized by Google

d'où

$$\mathcal{H} = 2\pi\sqrt{\frac{n^2I^2}{r} + \frac{n'^2I'^2}{r'^2} + \frac{2nn'II'}{rr'}\cos\alpha}\,.$$

431. — Grandeur et direction du champ magnétique de deux enroulements rectangulaires entre eux. — Soit un disque en fer (fig. 231) placé à l'intérieur de deux cadres identiques

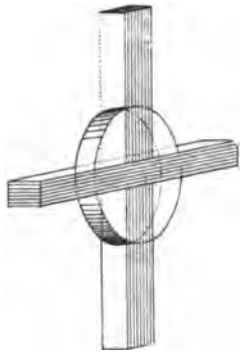

Fig. 231

rectangulaires, d'un diamètre beaucoup plus grand que le disque et parcourus par des courants ; d'après ce que nous venons de dire, l'action des deux cadres équivaut à celle d'un cadre unique dont le champ magnétique au centre aurait pour valeur

$$\sqrt{h^2 + h'^2}.$$

La direction de chaque champ étant perpendiculaire à son cadre respectif, si on désigne par θ l'angle du champ résultant avec le premier champ h, la direction du champ résultant sera donnée par l'équation

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h'}{h}.$$

432. — Champs magnétiques tournants. — Reprenons la figure précédente, supprimons l'un des cadres, et dans celui qui reste, faisons passer un courant constant. Nous aurons créé ainsi un champ magnétique h_1 qui déterminera, dans le disque, une aimantation dont la ligne polaire sera normale au cadre.

Digitized by Google

Si alors, on fait tourner ce cadre autour de l'axe du disque, les pôles se déplaceront avec le cadre et avec la même vitesse, la ligne des pôles lui restant constamment normale.

Nous allons maintenant démontrer qu'on peut arriver au même résultat en remplaçant le cadre mobile par deux cadres fixes. En effet, remplaçons d'abord le cadre mobile par un ensemble de deux cadres rectangulaires entre eux, calculés de telle façon que le champ résultant de ces deux cadres soit justement égal au champ h_1 du cadre mobile ; il suffira pour cela, de satisfaire à l'équation

$$h_1 = \sqrt{h^2 + h'^2},$$

h et h' étant les champs respectifs de chacun des cadres.

Si on fait tourner l'ensemble des deux cadres autour de l'axe du disque, comme dans l'expérience précédente, on obtiendra le même mouvement de rotation de la ligne des pôles.

Mais, si, au lieu de faire tourner cet ensemble, on le rend fixe, et si on fait varier les deux courants, et par conséquent h et h', de façon qu'à chaque instant leur résultante soit constante et égale à h_1, c'est-à-dire que l'on ait

$$\sqrt{h^2 + h'^2} = h_1 = \text{Constante},$$

la ligne des pôles tournera autour de l'axe du disque comme dans

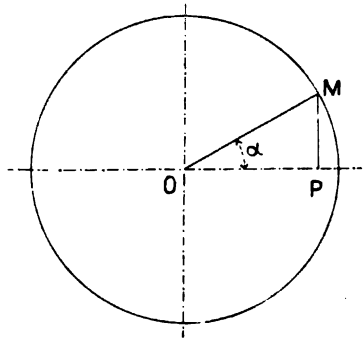

Fig. 232

le cas du cadre mobile unique. On aura ainsi créé un champ magnétique tournant, par la simple variation de l'intensité des champs individuels créés par les deux cadres.

Digitized by Google

On peut représenter (fig. 232) graphiquement ce résultat en posant

$$h = h_1 \sin \alpha = MP,$$

$$h' = h_1 \cos \alpha = OP.$$

En faisant tourner la droite OM autour du point O, on aura à chaque instant

$$OM = \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2} = \text{Constante.}$$

OM représentera donc la résultante du champ magnétique tournant[1].

433. — Différentes dispositions de champs tournants. — Considérons un anneau (fig. 233) se composant d'un tore en fer

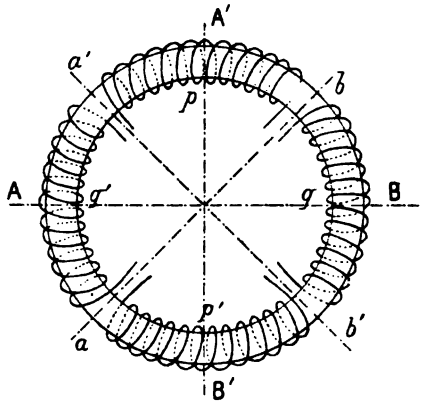

Fig. 233

doux sur lequel on a enroulé, dans le même sens, quatre solénoïdes p, q, p', q', occupant chacun un espace angulaire de 90°.

Nous allons voir que l'on peut créer un champ magnétique tournant, en lançant dans ces solénoïdes des courants d'intensité convenablement calculée. Si, en effet, on fait passer le courant dans les bobines p et p', seulement, on créera en A un double pôle austral et en B un double pôle boréal ; si, au lieu de le faire passer dans p et p', on fait passer le courant dans q et q', on créera en A' un

(1) Voir dans l'*Appendice* (NOTE IX) l'extrait de la première description qui ait été faite en 1883 des champs magnétiques tournants tels qu'ils ont été employés depuis, dans les moteurs à courants alternatifs.

Digitized by Google

double pôle austral et en B′ un double pôle boréal. Enfin, si l'on fait passer le même courant dans les quatre solénoïdes convenablement groupés, on obtiendra une ligne des pôles résultante, suivant les bissectrices *ab* ou *a′b′*.

On peut d'ailleurs faire tourner graduellement cette résultante : en effet, établissons le courant I dans les bobines *p* et *p′*, et faisons croître le courant I′ de 0 jusqu'à la valeur I, dans *q* et *q′*; l'angle de la résultante avec la droite AB, partira de 0° et arrivera à 45° : à ce moment, diminuons le courant I dans *p* et *p′* jusqu'à 0, en maintenant I′ constant, la résultante continuera à tourner dans le même sens jusqu'à prendre la position correspondant à 90°. On aura réalisé ainsi un champ tournant, mais dans lequel l'intensité de la résultante sera en général variable, à moins que les courants lancés dans les deux paires d'enroulements *pp′*, *qq′*, n'aient des intensités qu'il est très difficile de déterminer par le calcul et que l'expérience seule pourrait faire connaître d'une façon exacte ; on peut cependant la rendre *sensiblement* constante si on a, entre les courants qui traversent les deux paires d'enroulements, la relation

$$I^2 + I'^2 = \text{Constante}.$$

Le dispositif primitivement étudié, dans lequel le noyau magnétique est constitué par un disque en fer, donne un résultat s'approchant beaucoup plus d'une valeur constante lorsque les courants satisfont à la relation ci-dessus.

434. — Anneau Pacinotti. — Champ constant tournant produit par la rotation d'un courant constant. — Sectionnement. — L'anneau Pacinotti (fig. 234) se compose d'un tore en fer doux sur lequel sont enroulées un grand nombre de spires formant des sections réunies entre elles, la sortie de chacune d'elles étant reliée à l'entrée de la suivante, et à une série de touches en cuivre isolées les unes des autres et formant un *collecteur* sur lequel frottent deux balais diamétralement opposés. Nous supposerons l'ensemble de l'anneau et du collecteur fixe, les balais seuls pouvant tourner.

On peut déterminer facilement la position des pôles magnétiques produits dans le tore en fer, par un tel ensemble. Si *n* est le nombre

Digitized by Google

des sections, il y en aura $\frac{n}{2}$ qui produiront une certaine polarité dans une moitié de l'anneau, et $\frac{n}{2}$ une polarité inverse dans l'autre moitié, de manière à créer dans le tore, sur un même diamètre, passant par la ligne des contacts des balais, un double pôle nord et un double pôle sud. Si on fait tourner les balais de 180°, l'aimantation changera de signe, et on aura ainsi opéré une rotation de la ligne des pôles, c'est-à-dire du champ magnétique, de 180°.

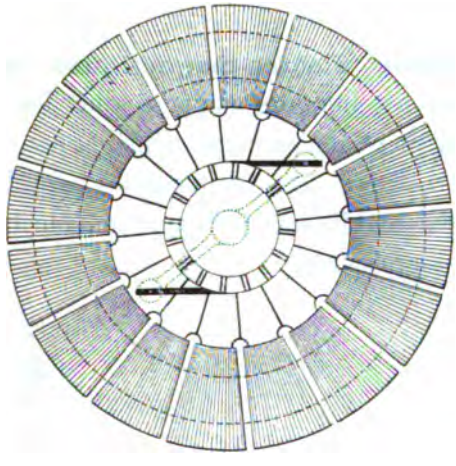

Fig. 234

Il faut noter que dans le mouvement de rotation des balais, le champ tournera par saccades, chaque fois que l'on passera d'une touche du collecteur à l'autre ; mais son intensité restera rigoureusement constante, puisque le courant qui traverse les bobines est constant.

On ne saurait trop insister sur l'importance et la fécondité de ce principe du sectionnement, qui permet de renverser complètement l'aimantation dans un anneau de fer de dimensions considérables, par une simple rotation de balais, sans changer en rien l'énergie emmagasinée dans cet anneau ; alors qu'on ne pourrait le faire sans danger, par une inversion de courant, à cause de la formation d'extra-courants très intenses.

Digitized by Google

La seule énergie dépensée en raison de cette inversion des pôles est due, comme nous le verrons, à l'*hystérésis* du fer.

435. — Applications du sectionnement à un circuit de forme quelconque. — Nous citerons comme applications du principe du sectionnement, plusieurs appareils imaginés par M. Marcel Deprez et dont on trouvera la description dans l'appendice [1].

§ 4. — SIMILITUDE DES SYSTÈMES ÉLECTRO-MAGNÉTIQUES.

436. — Systèmes électro-magnétiques semblables. — Jusqu'ici, nous avons toujours supposé que les circuits étaient filiformes. Pratiquement, il n'en est pas ainsi, et nous allons examiner ce que deviennent, dans ce cas, les formules précédentes et quelles sont les lois qui régissent les efforts de systèmes électro-magnétiques, composés de plusieurs spires.

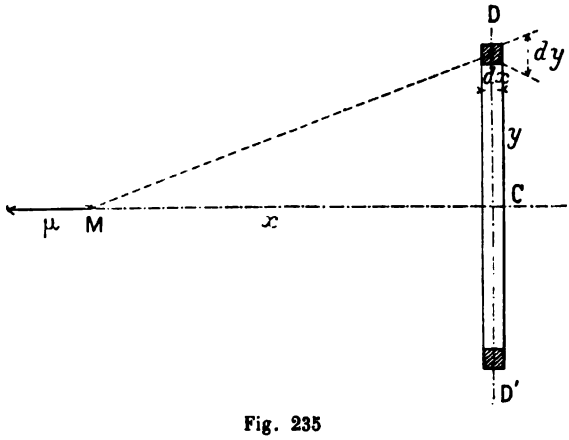

Fig. 235

Prenons le cas de la boussole des tangentes, mais en supposant un fil à section carrée (fig. 235).

Nous avons vu (370) que l'action exercée sur une masse magné-

(1) Voir à l'Appendice (NOTE X) les résultats des expériences de M. Marcel Deprez sur les marteaux-pilons électriques.

Digitized by Google

tique μ, égale à l'unité, placée en M sur la perpendiculaire MC au plan du circuit circulaire DD', par un élément de courant, est donnée par la formule

$$df = \mu I.ds \frac{r}{(\sqrt{r^2 + a^2})^3}.$$

Remplaçons dans cette formule, le rayon r du cadre, par y ; la distance a du centre du cadre à la masse magnétique, par x ; l'intensité I du courant, par le produit de la densité i de ce courant par l'élément de section $dxdy$, et faisons $\mu = 1$. Nous aurons :

$$df = i.dxdy.ds \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En intégrant cette expression par rapport à s, entre les limites $s = 0$ et $s = 2\pi y$, il vient, pour valeur de la force due à une spire complète de section $dxdy$

$$f = \frac{2\pi y^2 dxdy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} i$$

et pour le cadre entier

$$F = 2\pi i \iint \frac{y^2 dxdy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si on multiplie les dimensions du cadre par le nombre k, dx deviendra kdx, dy deviendra kdy et la valeur de F sera finalement multipliée par k.

On en conclut que : *dans des systèmes électro-magnétiques semblables, l'intensité du champ magnétique, pour des points semblablement placés, est proportionnelle au rapport de similitude des systèmes, à la condition que la densité du courant reste la même.*

437. — Cherchons maintenant ce qui se passe si on augmente toutes les dimensions du système, y compris le cadre et l'aimant.

Le couple produit par le cadre sur l'aimant, a pour valeur le produit de l'effort F exercé sur l'unité de masse magnétique, par le moment de l'aimant. Mais ce moment est égal (213) au produit de l'intensité d'aimantation $\mathfrak{I}$ par le volume u de l'aimant. On a donc,

Digitized by Google

en désignant par C la valeur de ce couple

$$C = \frac{2\pi y^2 dx dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} i\mathfrak{J}u.$$

Si on multiplie par k, les dimensions de l'aimant seul, son volume u deviendra k^3u et C deviendra k^3C.

Si on multiplie également les dimensions du cadre, par k, le couple sera multiplié par k^4.

Si, par exemple, on multipliait les dimensions du cadre seul sans changer celles de l'aimant, par le facteur 3, le couple serait multiplié par 3.

Mais, si on multipliait également les dimensions de l'aimant par 3 ($\mathfrak{J}$ conservant bien entendu la même valeur) le couple deviendrait 81 fois aussi considérable.

Digitized by Google

CINQUIÈME PARTIE

ÉLECTRO-DYNAMIQUE

CHAPITRE UNIQUE

ACTIONS ELECTRO-DYNAMIQUES

§ 1. — LOIS D'AMPÈRE ET APPLICATIONS.

438. — Action mutuelle de deux éléments de courant. — C'est à Ampère que l'on doit la découverte de lois régissant les actions mécaniques que les courants exercent les uns sur les autres ; l'Électro-dynamique a pour but l'étude de ces actions.

Ampère a résumé ces lois dans la formule suivante :

$$f = f_1 \frac{II' dl dl'}{r^2} \left(\cos \omega - \frac{3}{2} \cos \alpha \cos \alpha' \right)$$

formule dans laquelle :

f est la force avec laquelle s'attirent ou se repoussent deux éléments de courant infiniment petits dl et dl' (fig. 236), suivant la droite de longueur r qui joint leurs milieux. Ces éléments s'attirent si les courants sont de même sens, et se repoussent s'ils sont de sens contraire ;

I et I′ sont les intensités des courants qui parcourent les éléments dl et dl' ;

Digitized by Google

α et α', les angles qu'ils forment; l'un avec la droite qui joint leurs milieux, l'autre avec son prolongement ;

ω, l'angle que forment entre eux ces deux éléments;

f_1, une constante qui dépend du système d'unités adopté.

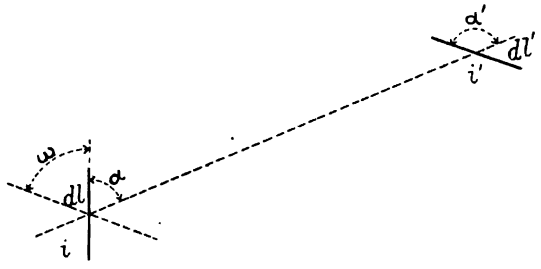

Fig. 236

La force f est dirigée suivant la droite qui joint les milieux des éléments de courants ; cette force est répulsive lorsque sa valeur est positive ; elle est attractive lorsque cette valeur est négative. On voit que, dans le cas particulier où les deux éléments de courant sont perpendiculaires entre eux, et qu'un des éléments est perpendiculaire à la droite qui joint leurs milieux, la force f s'annule.

439. — Action de deux courants rectilignes et parallèles dont l'un est indéfini. — Définition de l'unité électrodynamique d'intensité de courant. — Soient deux courants rectilignes et parallèles (fig. 237) dont l'un PQ est indéfini; sur

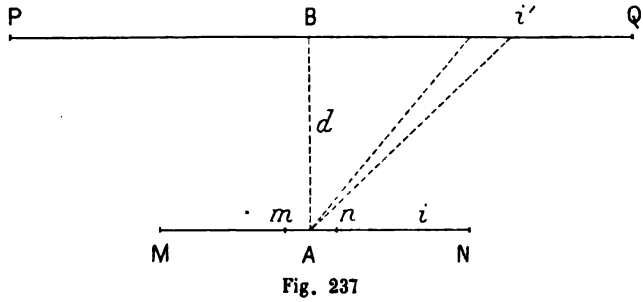

Fig. 237

l'autre MN, de longueur finie l, prenons un élément de courant $mn = dl$; et appliquons la formule d'Ampère. La distance qui

Digitized by Google

sépare les deux courants est la perpendiculaire, $AB = d$, abaissée du milieu de l'élément mn sur PQ. L'angle ω des deux courants, est constamment égal à 0 ; on a donc, quels que soient les éléments dl et dl', $\cos\omega = 1$; et la formule générale devient

$$f = f_1 \frac{II'dldl'}{r^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\alpha.\cos\alpha'\right).$$

On voit que f est un infiniment petit du second ordre et que, pour trouver la valeur de l'effort F réellement exercé entre les deux courants, il faudra faire deux intégrations successives. On aura donc

$$F = f_1 II' \iint \frac{dldl'}{r^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\alpha\cos\alpha'\right).$$

L'intégration étant faite, on arrive à l'expression

$$F = f_1 II' \frac{l}{d}.$$

440. — Cette formule va nous permettre de définir *l'unité électro-dynamique de courant.*

Si, en effet, dans cette formule, on fait

$$f_1 = 1, \qquad I = I' = 1, \qquad l = 1 \qquad \text{et} \qquad d = 1$$

on aura

$$F = 1.$$

D'où la définition de l'unité électro-dynamique de courant : *C'est l'intensité du courant rectiligne qui exercerait une action égale à l'unité de force, sur un courant indéfini parallèle, situé à une distance égale à sa propre longueur.*

Cette définition est peu pratique, et difficilement réalisable.

441. — Actions mutuelles de deux courants fermés rectangulaires, mobiles autour d'axes de rotation parallèles. — Deuxième définition de l'unité électro-dynamique d'intensité de courant. — Soient deux circuits ABCD et A'B'C'D' (fig. 238), que nous supposerons carrés et situés à une distance assez grande l'un de l'autre pour que l'on puisse considérer leurs dimensions comme très petites par rapport à cette distance. Nous

Digitized by Google

supposerons que le centre O′ du second cadre est situé sur la perpendiculaire élevée en O, au plan du premier, et que les plans des deux cadres sont perpendiculaires entre eux. Le cadre ABCD étant supposé fixe, exerce sur A′B′C′D′ des efforts que l'on peut

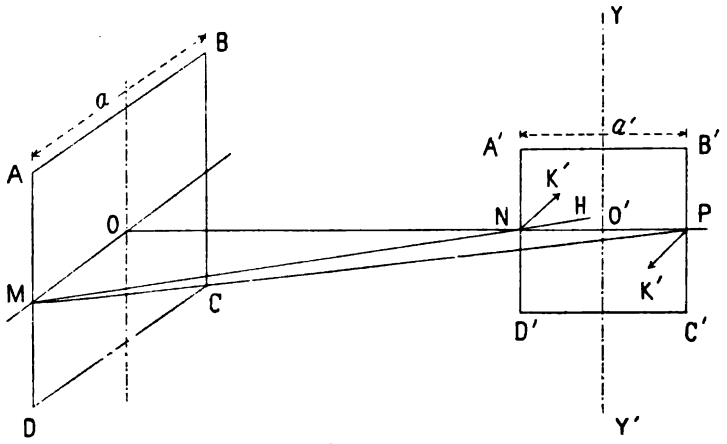

Fig. 238.

calculer directement par la formule d'Ampère, parce que nous avons supposé les côtés a et a' des deux cadres très petits par rapport à la distance OO′. Désignons par I et I′ les intensités des courants qui traversent les deux cadres, et remarquons que les côtés AD, A′D′ étant parallèles, on a, dans la formule d'Ampère :

$$\cos\omega = 1, \qquad \cos\alpha = 0, \qquad \cos\alpha' = 0.$$

Nous en déduirons pour la valeur de l'effort exercé par le côté AD sur le côté A′D′

$$f_1 \frac{aa'.II'}{\overline{MN}^2},$$

et la composante suivant NK′ normale au plan A′B′C′D′, sera

$$f_1 \frac{aa'.II'}{\overline{MN}^2} \cos K'NH = f_1 \frac{aa'.II'}{\overline{MN}^2} \sin ONM = f_1 \frac{a^2a'.II'}{2\overline{MN}^3}.$$

De même, BC exerce sur A′D′ une action dont la composante, perpendiculaire au second cadre, est de même signe et égale à celle que nous venons de calculer.

Digitized by Google

La somme des moments de ces deux forces par rapport à YY', est donc égale à

$$f_1 \frac{a^2 a' \mathrm{II}'}{\overline{\mathrm{MN}}^3} \cdot \frac{a'}{2} = f_1 \mathrm{II}' \frac{a^2 a'^2}{2\overline{\mathrm{MN}}^3}.$$

On démontrerait de même que la somme des moments des forces exercées par AD et BC sur B'C', aurait pour expression

$$f_1 \mathrm{II}' \frac{a^2 a'^2}{2\overline{\mathrm{MP}}^3}$$

Le moment total des actions mutuelles des côtés verticaux des deux cadres, est donc égal à

$$\frac{1}{2} \cdot f_1 \mathrm{II}' a^2 a'^2 \left(\frac{1}{\overline{\mathrm{MN}}^3} + \frac{1}{\overline{\mathrm{MP}}^3} \right).$$

Quant aux moments des actions des côtés AB et DC sur le cadre A'B'C'D', il est facile de voir qu'ils sont nuls.

Le moment total de rotation sera donc égal à

$$\mathrm{M} = f_1 \cdot \frac{a^2 a'^2 . \mathrm{II}'}{2} \cdot \left(\frac{1}{\overline{\mathrm{MN}}^3} + \frac{1}{\overline{\mathrm{MP}}^3} \right),$$

et comme on peut poser approximativement $\mathrm{MN} = \mathrm{MP} = r$, en raison du grand éloignement des deux cadres, la formule devient

$$\mathrm{M} = f_1 \cdot \frac{a^2 a'^2 . \mathrm{II}'}{r^3},$$

et, si on désigne par S et S' les surfaces des deux carrés, on a finalement

$$\mathrm{M} = f_1 \frac{\mathrm{SS}' . \mathrm{II}'}{r^3}.$$

La même formule s'applique à des circuits fermés quelconques, placés comme les cadres que nous venons de considérer; à deux courants circulaires par exemple.

442. — En faisant, dans la formule que nous venons de trouver

$$f_1 = 1, \qquad \mathrm{S} = \mathrm{S}' = 1, \qquad \mathrm{I} = \mathrm{I}' = 1$$

on trouve

$$\mathrm{M} = \frac{1}{r^3}.$$

On pourra donc définir l'unité électro-dynamique d'intensité : *celle*

Digitized by Google

d'un courant qui, traversant deux cadres de surface égale à l'unité, placés dans des plans normaux, à une grande distance l'un de l'autre, de façon que le centre du second se trouve sur une normale élevée au centre du premier, exercerait sur le second circuit un couple de rotation dont le moment serait égal à l'unité divisée par le cube de la distance des deux centres.

Cette définition est due à Weber.

443. — Autre solution du problème précédent. — Dimensions des unités électro-dynamiques. — On peut traiter le problème des deux cadres d'une autre façon, en supposant que le premier circuit traversé par le courant I, donne naissance à un champ magnétique dans lequel est plongé le deuxième circuit fermé que l'on assimile à un feuillet magnétique.

Si on suppose que les circuits sont circulaires, le champ créé par le premier circuit sera (380), en désignant par r le rayon du premier cadre et par a la distance des deux cadres

$$\mathcal{H} = 2\pi I \frac{r^2}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou bien, en remarquant que $\pi r^2 = S$

$$\mathcal{H} = 2 \frac{IS}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

D'un autre côté, le moment magnétique du deuxième circuit, considéré comme un feuillet magnétique, est égal à I'S'; le couple exercé sur le deuxième circuit sera donc

$$M = 2 \frac{SS'II'}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

mais nous pouvons négliger r devant a, et alors il vient

$$M = 2 \frac{SS'II'}{a^3},$$

nous arrivons donc finalement à un résultat deux fois aussi grand que dans le numéro précédent. On en conclut qu'il faudra multiplier la formule d'Ampère par le nombre 2 pour arriver à des résultats

Digitized by Google

identiques à ceux que donne la formule de Biot et Savart, et, qu'à un coefficient constant près, il y a identité entre les définitions électro-magnétique et électro-dynamique de l'unité d'intensité de courant.

444. — Identité des dimensions de l'intensité d'un courant dans les systèmes électro-magnétique et électro-dynamique. — Cette identité résulte des considérations suivantes.

L'intensité d'un courant, tirée de la formule de Biot et Savart qui est la base de l'électro-magnétisme, a pour valeur

$$I = \frac{Fr^2}{\mu ds \sin \alpha}.$$

Si nous remplaçons F par sa valeur symbolique (6)

$$MLT^{-2},$$

en unités absolues ; r^2, par le carré d'une longueur L^2 ; la masse magnétique μ par sa valeur exprimée en unités absolues (200)

$$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} ;$$

ds, qui est une longueur, par L ; et en remarquant que sin α est un nombre indépendant du choix des unités, il vient

$$I = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1},$$

ce qui est la racine carrée d'une force.

Cherchons maintenant l'expression symbolique du courant donnée par la formule d'Ampère

$$F = \frac{II' ds ds'}{r^2}\left(\cos \omega - \frac{3}{2} \cos \alpha \cos \alpha'\right).$$

Nous pouvons supposer $I = I'$, et la formule donne

$$I^2 = \frac{Fr^2}{ds ds'} \cdot \frac{1}{\cos \omega - \frac{3}{2} \cos \alpha \cos \alpha'}.$$

Nous pouvons, dès à présent, laisser de côté le coefficient numérique

$$\frac{1}{\cos \omega - \frac{3}{2} \cos \alpha \cos \alpha'},$$

Digitized by Google

puisqu'il est indépendant du choix des unités, et en remplaçant comme nous l'avons fait dans la formule de Biot et Savart, ds et ds' par la lettre L qui représente une longueur; r^2 par L^2; et F par

$$MLT^{-2},$$

il vient finalement

$$I = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1},$$

expression identique à celle que donne la loi de Biot et Savart.

L'intensité d'un courant a donc une expression identique, à un coefficient numérique près, dans les systèmes électro-magnétique et électro-dynamique.

Il est facile de voir qu'il résulte de là que toutes les autres quantités électriques auront des expressions identiques dans les deux systèmes, à la condition toutefois qu'on les multiplie par ce même coefficient numérique. Si nous voulons, par exemple, exprimer une quantité d'électricité Q, nous savons que l'on peut écrire

$$Q = IT,$$

et, comme l'unité de temps est la même dans les deux systèmes, il suffira, pour passer d'un système à l'autre, de multiplier le nombre qui exprime la quantité d'électricité dans le système électro-magnétique, par le coefficient déjà employé pour l'intensité de courant.

Il en serait de même pour le potentiel qui est le quotient d'un travail par une quantité d'électricité ; car l'unité de travail étant la même dans les deux systèmes, l'expression du potentiel n'est affectée que par le coefficient qui entre dans l'expression de la quantité d'électricité, et par conséquent, dans celle de l'intensité de courant.

445 — Cas particulier où les deux circuits circulaires sont concentriques. — Électro-dynamomètre. — On peut supposer que les deux circuits circulaires ou solénoïdes du numéro 443 sont concentriques, tout en conservant leur position respective d'orientation comme l'indique la figure 239.

Le premier solénoïde, traversé par le courant I, de rayon r et contenant n spires, donne naissance à un champ magnétique égal à

$$\mathcal{H} = \frac{2\pi n I}{r}.$$

Digitized by Google

Le deuxième solénoïde, plongé dans ce champ, se comportera comme un aimant dont le moment magnétique aurait pour valeur

$$n'S'I',$$

S' désignant la surface embrassée par toute la spire moyenne du

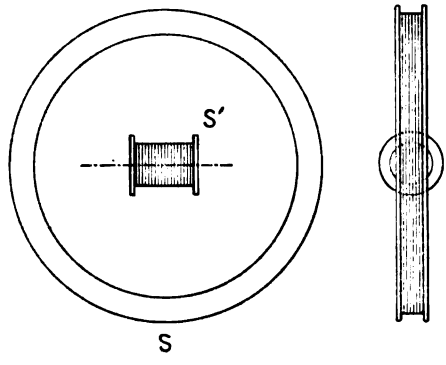

Fig. 239

second cadre et n' le nombre de spires. Le couple appliqué à ce cadre a donc pour valeur

$$n'S'I' \times \mathcal{H},$$

En remplaçant $\mathcal{H}$ par sa valeur, et en désignant le couple par M, on aura

$$M = 2\pi \frac{nn'II'S'}{r}.$$

On voit que ce couple est proportionnel au produit des intensités I et I' des courants qui traversent les deux cadres.

446. — Weber a réalisé, d'après ce principe, un appareil que l'on appelle l'*Electro-dynamomètre* et qui sert à mesurer l'intensité d'un courant ; il suffit pour cela de faire passer le même courant dans les deux cadres ce qui revient à faire $I = I'$ dans la formule précédente ; l'intensité du courant y figurant alors au carré, son signe n'intervient plus, ce qui permet de mesurer l'intensité de courants alternatifs.

M. Marcel Deprez a montré, comme nous le verrons plus tard,

Digitized by Google

que l'on peut appliquer l'électro-dynamomètre à la mesure de l'énergie produite par un courant. L'appareil qu'il a imaginé à cet effet, a servi de type à tous les instruments réalisés depuis par différents constructeurs sous le nom de *Wattmètres*, *Ergmètres*, etc.

Nous aurons l'occasion de décrire complètement l'électro-dynamomètre quand nous parlerons des instruments de mesures électriques.

§ 2. — SIMILITUDE DES SYSTÈMES ÉLECTRO-DYNAMIQUES.

447. — Théorème de M. Marcel Deprez. — Dans les différents problèmes que nous venons de traiter, nous avons toujours supposé que les conducteurs étaient filiformes; mais en réalité tout conducteur exige une certaine section; voyons ce que devient la formule d'Ampère quand on y introduit cet élément nouveau.

Appelons s la section du premier conducteur traversé par un courant de densité i; s' et i' la section et la densité du courant pour le deuxième conducteur, on a alors

$$I = is,$$
$$I' = i's',$$

la formule d'Ampère devient

$$f = \frac{f_1 ii' sdl.s'dl'}{r^2}\left(\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\alpha\cos\alpha'\right),$$

et, si on remarque que les produits sdl, $s'dl'$ sont précisément les volumes du et du' des éléments de conducteurs, la formule devient :

$$f = f_1 \frac{ii' du du'}{r^2}\left(\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\alpha\cos\alpha'\right).$$

Multiplions maintenant par k toutes les dimensions linéaires de chaque système électro-dynamique, sans changer le nombre des portions de circuits élémentaires; du deviendra k^3du; du', k^3du', et en appelant f_k la nouvelle valeur de f, correspondant au système

Digitized by Google

des deux conducteurs dont toutes les dimensions sont amplifiées k fois, on aura

$$f_k = f_1 \frac{ii' k^3 du k^2 du'}{k^2 r^2} \left(\cos\omega - \frac{3}{2} \cos\alpha \cos\alpha' \right).$$

On tire cette formule, en la divisant par la valeur de f

$$f_k = k^4 f.$$

On en conclut le théorème suivant :

Si on multiplie par k toutes les dimensions ainsi que les distances mutuelles des éléments de deux conducteurs A *et* B, *de façon à former un nouveau système de conducteurs* A′ *et* B′ *géométriquement semblable au premier et parcouru par un courant de même densité, les actions mécaniques développées entre* A′ *et* B′, *seront k^4 fois aussi grandes que les actions développées entre* A *et* B.

Si par exemple, on double toutes les dimensions linéaires ainsi que les distances des deux systèmes, l'effort développé sera 16 fois aussi grand.

448. — Comparaison des dépenses d'énergie dans les deux systèmes. — Si on calcule l'énergie transformée en chaleur par le passage du courant, dans le premier système, elle a pour valeur (331)

$$\rho u i^2,$$

dans le second système, elle a pour valeur

$$\rho u' i'^2 ;$$

le rapport de ces deux dépenses sera égal à

$$\frac{u'}{u} = k^3,$$

tandis que l'effort sera multiplié par k^4 ; donc la dépense d'énergie par unité d'effort sera k fois moindre dans le grand système ; plus le système sera grand, plus la dépense sera faible.

449. — D'autre part, les poids des conducteurs employés dans les deux systèmes, sont entre eux comme u' est à u ; *l'effort produit par unité de masse est donc multiplié par k dans le système amplifié.*

Digitized by Google

Ces théorèmes, démontrés par M. Marcel Deprez en 1882 [1], ont été vérifiés expérimentalement au moyen d'appareils spéciaux. Ils sont d'une grande utilité dans la pratique, puisqu'ils montrent les avantages considérables des systèmes électro-dynamiques de grandes dimensions.

450. — Moments de rotation de deux systèmes électro-dynamiques semblables. — Nous allons chercher comment croît le moment de rotation d'un système, quand on augmente toutes ses dimensions dans un certain rapport k.

Le moment de chaque élément s'obtient en multipliant l'effort auquel il est soumis, par sa distance à l'axe de rotation. Si on multiplie toutes les dimensions linéaires du premier système par k, le bras de levier est aussi multiplié par k; mais nous avons déjà vu que la force exercée par l'un des conducteurs sur l'autre était, dans le système amplifié, k^4 fois aussi grande que dans le premier. Son moment sera donc proportionnel à $k^4 \times k = k^5$.

Ainsi, si un système A′, B′, est deux fois aussi grand qu'un autre système A, B, le couple développé dans AB croîtra comme la cinquième puissance de 2, c'est-à-dire deviendra 32 fois aussi grand.

On démontrerait de la même façon que le travail produit par un même déplacement angulaire du circuit mobile de chaque système, est k^5 fois aussi grand dans le deuxième système que dans le premier.

451. — Calcul des actions mécaniques mutuelles de deux courants. — Nous ne nous étendrons pas sur le cas général du calcul des actions mutuelles de deux circuits fermés de forme quelconque. La solution de ce problème conduit en général, même dans des cas simples, à des formules d'une extrême complication ; dans la plupart des cas, elle est au-dessus des ressources de l'analyse. A titre d'exemple, nous donnerons la formule de l'attraction de deux cadres carrés, égaux, parallèles, *sans épaisseur* et situés à une dis-

(1) Comptes-rendus de l'Académie des sciences, (février 1882).

Digitized by Google

tance d l'un de l'autre; a étant le côté du carré, I et I' les courants qui traversent les cadres

$$F = II'.8\left[\frac{a^2}{d\sqrt{a^2+d^2}} - \frac{a^2 d}{(a^2+d^2)\sqrt{2a^2+d^2}} + \frac{2d}{\sqrt{a^2+d^2}} - \frac{d}{\sqrt{2a^2+d^2}} - 1\right].$$

452. — Applications du théorème de l'équivalence entre les circuits fermés et les feuillets magnétiques. — Nous avons vu (418) qu'un circuit fermé équivaut, pour les actions qu'il exerce sur une masse magnétique, à un feuillet magnétique tel que

$$\Phi = I,$$

Φ étant la puissance du feuillet magnétique, I l'intensité du courant qui traverse le circuit.

En continuant cette assimilation, on peut dire que l'action mutuelle de deux circuits fermés peut être ramenée à celle de deux feuillets magnétiques et on peut appliquer aux circuits fermés toutes les propriétés des feuillets magnétiques (243 à 246) à la seule condition de remplacer dans les formules que nous avons démontrées en parlant des feuillets magnétiques, la puissance Φ des feuillets par l'intensité I des courants équivalents. Le coefficient M qui entre dans l'expression du travail dû au rapprochement des feuillets, de l'infini jusqu'à leur position actuelle, prend, lorsqu'il s'agit de courants électriques, le nom de *coefficient d'induction mutuelle*.

Reprenons la formule qui donne le travail dû au déplacement de deux feuillets magnétiques (247)

$$\mathcal{T} = M\Phi_A\Phi_B,$$

et remplaçons Φ_A et Φ_B par les intensités I_A et I_B, des courants équivalents, de même contour que les feuillets considérés, l'expression du travail deviendra

$$\mathcal{T} = MI_AI_B.$$

Faisons $I_A = 1$ et $I_B = 1$; on aura, en appelant $\mathcal{T}_1$ le travail produit,

$$\mathcal{T}_1 = M.$$

Le coefficient M est donc égal à la valeur numérique du travail produit lorsque les deux circuits se rapprochent depuis l'infini jus-

Digitized by Google

qu'à leur position actuelle, le courant qui les traverse ayant une intensité égale à l'unité.

Or, nous démontrerons, en traitant de l'Induction électro-magnétique, que la valeur de ce travail est précisément égale au coefficient d'induction mutuelle des deux circuits dans leur position actuelle.

La détermination du facteur M peut être obtenue par le calcul, au moyen d'une formule due à Neumann que nous ne donnerons pas malgré son importance théorique parce que, dans la plupart des cas, elle conduit à des calculs qui sont au-dessus des forces de l'analyse.

453. Équivalence d'un solénoïde et d'un aimant. — Un solénoïde peut être considéré comme composé d'un nombre infini de spires représentant des feuillets magnétiques se touchant par leurs faces de nom contraire, de sorte que les actions magnétiques de deux faces adjacentes se neutralisent mutuellement, et il ne reste plus à considérer que les deux faces des feuillets situées aux extrémités des solénoïdes, et qui sont chargées d'une quantité de magnétisme libre $+\mu$ pour l'une et $-\mu$ pour l'autre.

Cette quantité de magnétisme est facile à évaluer, on a en effet

$$\mu = \mathfrak{I} s,$$

$\mathfrak{I}$ étant la densité magnétique et s la surface d'une spire. D'autre part, la puissance Φ d'un des feuillets est, par définition, égale à $\mathfrak{I}\delta$ d'où

$$\mathfrak{I} = \frac{\Phi}{\delta},$$

δ étant la distance des deux faces du feuillet ; mais, en appelant N le nombre des spires et L la longueur du solénoïde, on a

$$\delta = \frac{L}{N};$$

en remplaçant δ et $\mathfrak{I}$ par leur valeur dans l'expression de μ, il vient

$$\mu = \frac{\Phi}{\delta} s = \frac{\Phi N s}{L},$$

et, en posant

$$\frac{N}{L} = n_1$$

Digitized by Google

n_1 étant le nombre de spires par unité de longueur, et en remplaçant Φ par I, on arrive à la formule

$$\mu = n_1 s I.$$

Quant au moment magnétique de ce solénoïde, il a pour valeur le produit de la quantité de magnétisme μ répartie sur l'une des faces, multipliée par la longueur L du solénoïde ; soit

$$(n_1 L) s I = (n_1 I) L s = N s I.$$

Ces trois expressions du moment magnétique d'un solénoïde, ont chacune leur utilité suivant les problèmes que l'on a à traiter.

Les pôles de cet aimant artificiel sont exactement situés dans le plan des spires terminales, puisque ces plans sont les seuls qui contiennent du magnétisme libre.

Digitized by Google

Digitized by Google

SIXIÈME PARTIE

INDUCTION ÉLECTRO-MAGNÉTIQUE

CHAPITRE PREMIER

INDUCTION DUE AU MOUVEMENT RELATIF DE DEUX SYSTÈMES ÉLECTRO-MAGNÉTIQUES

§ 1. — INDUCTION PRODUITE PAR LE DÉPLACEMENT RELATIF D'UN CONDUCTEUR ET D'UN AIMANT

454. — Généralités. — C'est en 1832 que Faraday découvrit les phénomènes d'induction électro-magnétique.

Ces phénomènes peuvent se diviser en quatre classes suivant que l'on considère :

1° Le déplacement, dans un champ magnétique, d'un circuit parcouru par un courant.

2° Le déplacement relatif de deux circuits dont l'un est parcouru par un courant.

3° La variation d'intensité d'un champ magnétique dans lequel est plongé un circuit en repos parcouru par un courant.

4° La variation d'intensité du courant qui traverse l'un des deux circuits, supposés en repos relatif.

Tous ces phénomènes peuvent être ramenés à un seul cas : celui du déplacement relatif d'un circuit par rapport à un aimant. Nous

Digitized by Google

verrons en effet que, grâce au théorème de Neumann, vérifié par Félici, on a pu ramener l'induction due à la variation d'intensité d'un aimant ou d'un courant, aux lois de l'induction due au mouvement relatif.

Nous allons constater enfin, que toutes ces lois sont des conséquences nécessaires du principe de la conservation de l'Energie.

455. — Loi de Lenz. — Lenz a résumé, dans une seule loi, les phénomènes d'induction dus au déplacement, d'un circuit dans un champ magnétique, produit soit par des courants, soit par des aimants ; il a formulé la loi suivante :

Tout déplacement relatif d'un circuit et d'un champ magnétique, donne naissance à un courant induit qui tend à s'opposer au mouvement.

456. — Induction due au déplacement relatif d'un aimant et d'un courant. — Théorème du flux de force coupé. — Soit un aimant NS vertical (fig. 240) autour duquel peut tourner un petit équipage mobile équilibré ABC, dont les extrémités plongent dans

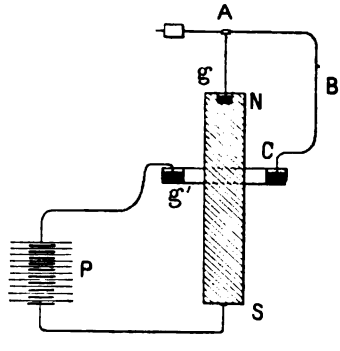

Fig. 240

des godets gg' remplis de mercure de façon à pouvoir y faire passer continuellement le courant d'une pile P. On constate que l'équipage se met à tourner autour de l'aimant ; nous savons, en effet, que sous l'action du champ magnétique créé par l'aimant, le fil ABC est soumis à une force dont nous avons déjà donné l'expression. Dans son

Digitized by Google

mouvement de rotation, il engendrera un certain travail mécanique $\mathfrak{T}$ dont on peut trouver la valeur en s'appuyant sur le théorème du flux de force coupé (404).

La pile étant la seule source d'énergie disponible, le travail qu'elle fournira dans l'unité de temps, pendant la rotation de ABC, sera (325)

$$E_0 I = RI^2 + \mathfrak{T},$$

E_0 étant la *f. e. m.* de la pile ; R, la résistance du circuit ABC et de la pile ; I le courant qui parcourt ce circuit.

Mais le travail $\mathfrak{T}$ a pour mesure le produit de la force constante f appliquée à un point matériel quelconque, invariablement lié à l'équipage mobile, par la vitesse linéaire V de ce point ; on a donc

$$\mathfrak{T} = f.V ;$$

il vient donc

$$E_0 I = RI^2 + f.V,$$

d'où

$$E_0 = RI + \frac{f}{I}.V.$$

Il faut donc, pour que le mouvement du fil soit possible, que la *f.e.m.* de la pile soit égale à RI augmenté d'un terme $\frac{f}{I}.V$, représentant une nouvelle *f. e. m.* s'ajoutant à RI et qui n'existerait pas si f ou V était nul. Cette *f. e. m.*, qui prend ainsi naissance, est indépendante de l'état électrique primitif du conducteur et s'appelle la *force électro-motrice d'induction.*

Par conséquent, si on supprime la pile et qu'on fasse mouvoir le fil, il se développera une *f. e. m.* d'induction égale à celle que nous venons de trouver. L'expérience confirme cette prévision.

On constate en effet, en intercalant un électromètre à la place de la pile, qu'il se développe une *f. e. m.* d'induction ayant la même valeur que dans l'expérience précédente, la vitesse de déplacement étant, bien entendu, la même. Cette *f. e. m.* d'induction qui prend ainsi naissance par suite du mouvement du conducteur est, comme nous venons de le dire, indépendante de l'état électrique du conducteur et de sa substance.

Digitized by Google

Comme extension de ce qui précède, considérons maintenant le cas d'un mouvement de translation rectiligne ; soient AB, A'B' (fig. 241), deux conducteurs rectilignes, parallèles et indéfinis, et MN

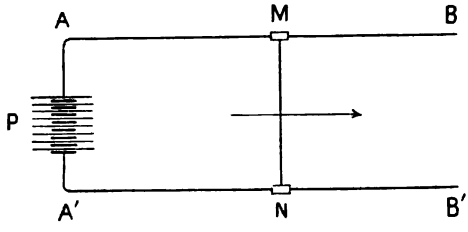

Fig. 241

un fil rectiligne pouvant glisser sur AB, A'B', en leur restant constamment perpendiculaire. Supposons que le tout soit plongé dans un champ magnétique uniforme dont les lignes de force sont perpendiculaires au plan ABA'B' et qu'un courant, fourni par une pile P, parcoure le circuit AMNA'; comme dans le cas précédent, la seule source d'énergie étant la pile, on a

$$E_0 = RI + \frac{f}{I} \cdot V,$$

et la *f. e. m.* d'induction E_1, a pour valeur

$$E_1 = \frac{f}{I} \cdot V.$$

On peut la mettre sous une autre forme ; en effet, en désignant par $\mathcal{H}$ la valeur du champ magnétique, on a (396)

$$f = \mathcal{H} l_n I,$$

d'où, en remplaçant dans l'équation précédente, f pour sa valeur, il vient

$$E_1 = \mathcal{H} l_n V,$$

formule dans laquelle $l_n.V$ est précisément l'aire engendrée par le fil pendant l'unité de temps, et le produit $\mathcal{H} l_n V$ le flux magnétique qui traverse cette aire. De cette formule, on peut déduire le théorème suivant :

La f. e. m. d'induction engendrée par un fil se déplaçant dans un

Digitized by Google

champ magnétique uniforme, a pour valeur le flux magnétique total coupé par le fil pendant l'unité de temps.

457. — Cas général. — Examinons maintenant le cas général du déplacement d'un élément de circuit dans un champ magnétique.

Nous avons vu que l'action exercée par un champ magnétique $\mathcal{H}$, sur un élément de circuit $CC' = dl$ (fig. 242), est égale à

$$\mathcal{H} I dl \sin \alpha,$$

α étant l'angle de l'élément avec la direction MN des lignes de force.

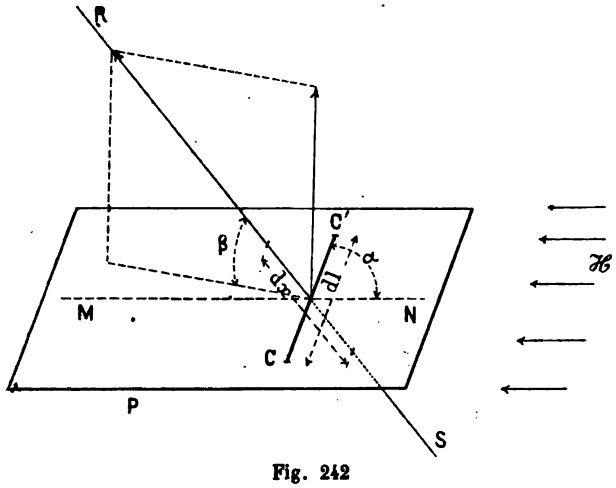

Fig. 242

Nous savons que cette force est perpendiculaire au plan P formé par l'élément dl et la direction des lignes de force.

Le travail produit pendant un déplacement dx suivant une direction quelconque RS, aura pour valeur le produit de cette force par le déplacement projeté sur sa direction, c'est-à-dire, par $dx \sin \beta$; β étant l'angle de RS avec le plan P. On aura donc, pour le travail produit pendant ce déplacement

$$\mathcal{H} I dl \sin \alpha \sin \beta dx,$$

et pendant l'unité de temps

$$\frac{\mathcal{H} I dl . \sin \alpha . \sin \beta \, dx}{dt}.$$

Digitized by Google

En divisant cette expression par I, on en déduira la *f. e. m.* d'induction

$$E_i = \frac{\mathcal{H} dl \sin\alpha \sin\beta dx}{dt},$$

ou, en désignant par V la vitesse $\frac{dx}{dt}$,

$$E_i = \mathcal{H} dl \sin\alpha \sin\beta . V.$$

Telle est la formule générale. Nous nous servirons néanmoins toujours de la première formule que nous avons trouvée

$$E_i = \mathcal{H} l_n . V,$$

car elle est beaucoup plus simple et conserve cependant la même généralité; il suffit, pour l'appliquer, de convenir expressément que la vitesse est comptée suivant la perpendiculaire au plan formé par la direction des lignes de force et l'élément de courant.

458. — Considérons en effet le produit des trois facteurs $\mathcal{H}$, dl, $\sin\alpha$; on peut écrire ce produit des deux façons suivantes :

$$(\mathcal{H} \sin\alpha) . dl$$
$$\mathcal{H} . (dl . \sin\alpha).$$

Dans la première expression, $(\mathcal{H} \sin\alpha)$ représente la composante du champ magnétique exprimée suivant une direction perpendiculaire à l'élément de conducteur.

Dans la deuxième $(dl \sin\alpha)$ représente la projection du conducteur suivant la direction du champ.

La formule générale se trouve donc ramenée à la forme très simple d'un produit de trois facteurs

$$\mathcal{H} . l_n . V.$$

ne contenant aucune ligne trigonométrique [1].

---

(1) On peut représenter très simplement, au moyen des phénomènes lumineux, les formules que nous venons de démontrer.

Soit O une source lumineuse sans dimension (fig. 243) d'une intensité telle que, sur une sphère transparente de rayon égal à 1, l'unité de surface donne passage à une quantité de lumière égale à μ unités.

Digitized by Google

459. — Quantité d'électricité mise en mouvement dans un circuit induit. — Nous venons de voir que la *f. e. m.* d'induction a pour expression, dans le cas le plus général, la valeur du flux de force magnétique coupé pendant l'unité de temps ; nous allons chercher maintenant la quantité d'électricité correspondante développée dans le circuit.

La force électro-motrice d'induction ayant pour valeur

$$E_1 = \mathcal{H} l_n V,$$

reportons-nous à la figure 241 et appelons R la résistance de l'ensemble, la pile étant supprimée ; le courant I_1 qui circule dans le circuit est alors

$$I_1 = \frac{E_1}{R} = \frac{\mathcal{H} l_n V}{R}.$$

Pendant le temps T la quantité d'électricité mise en jeu est

$$Q_1 = I_1 T$$

ou, en remplaçant I^1 par sa valeur,

$$Q_1 = \frac{\mathcal{H} l_n V T}{R}.$$

La quantité de lumière interceptée par un plan P quelconque situé à une distance r du point O sera, d'après les lois de l'optique,

$$\frac{\mu s \cos \alpha}{r^2},$$

α étant l'angle que fait la normale au plan avec le faisceau lumineux.

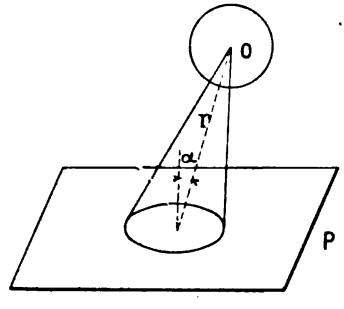

Fig. 243

Or, cette expression est justement celle que nous avons trouvée pour la valeur du flux de force qui émane d'une masse magnétique μ.

Il suffit donc, pour qu'il y ait identité entre les valeurs numériques du flux de force

Digitized by Google

Mais VT représente le chemin parcouru par le conducteur MN pendant le temps T; en appelant l' ce chemin, on aura

$$Q_1 = \frac{\mathcal{H} l_n l'}{R},$$

formule dans laquelle $\mathcal{H} l_n l'$ représente le flux de force coupé par le conducteur mobile pendant son mouvement. On a donc, finalement, en désignant par $\mathcal{F}$ le flux de force coupé

$$Q_1 = \frac{\mathcal{F}}{R}.$$

Telle est la quantité d'électricité développée par induction électro-magnétique pendant le mouvement d'un conducteur.

460. — Il est facile de voir que cette formule est générale et applicable à un circuit fermé de forme complexe, susceptible de se

---

magnétique et de l'intensité du faisceau lumineux, que *l'intensité de la source lumineuse, telle qu'elle vient d'être définie, soit représentée par le même nombre que l'intensité de la masse magnétique.*

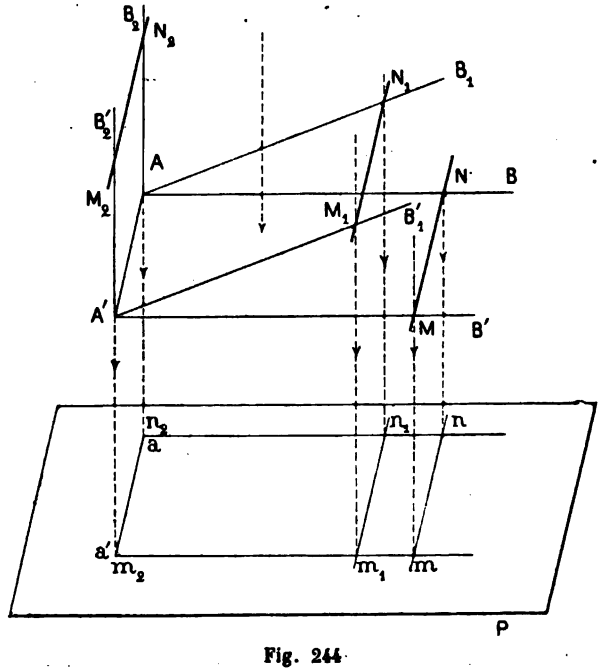

Fig. 244

Dans cet ordre d'idées, la force électro-motrice d'induction pourra être représentée de la manière suivante :

Digitized by Google

déformer, et dont toutes les parties se meuvent dans des champs magnétiques différents, avec des vitesses différentes.

Appelons, en effet, h_1, le champ magnétique dans lequel se meut le circuit; l_1 et v_1, la longueur et la vitesse d'un élément de ce circuit; h_2, l_2, v_2; h_3, l_3, v_3; etc... les quantités correspondantes des autres éléments du circuit; le courant développé dans l'ensemble sera

$$I_1 = \frac{h_1 l_1 v_1 + h_2 l_2 v_2 + \cdots}{R},$$

R étant la résistance totale du circuit.

La quantité d'électricité développée pendant le temps t, sera donc

$$Q = It = \frac{h_1 l_1 v_1 t + h_2 l_2 v_2 t + \cdots}{R},$$

or

$$h_1 l_1 v_1 t = \mathcal{F}_1,$$
$$h_2 l_2 v_2 t = \mathcal{F}_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ..., désignant le flux de force total coupé pendant le déplacement de chaque tronçon; à la condition, bien entendu, que les lettres h_1, h_2, h_3 ... représentent, non pas la valeur absolue du champ magnétique au point considéré, mais sa composante efficace. On a donc finalement

$$Q = \frac{\Sigma \mathcal{F}}{R},$$

quantité indépendante du temps et par conséquent de la vitesse; on en déduit le théorème suivant :

La quantité d'électricité développée dans un circuit fermé, par

---

Soient AB, A'B' (fig. 244) deux conducteurs fixes; MN un conducteur mobile se déplaçant parallèlement à lui-même en restant perpendiculaire à AB, A'B' et s'appuyant sur ces derniers; P un plan de projection perpendiculaire aux rayons lumineux Aa, Bb, Mm etc. supposés parallèles entre eux.

Nous supposerons d'abord le plan AB, A'B' des conducteurs fixes, parallèle au plan de projection P; le conducteur mobile MN, projetera alors sur ce plan une ombre *mn* et l'aire balayée dans l'unité de temps, pendant le déplacement de MN, sera égale à l'aire balayée par son ombre *mn* sur le plan P. Cette aire représentera précisément la force électro-motrice d'induction.

Si on fait tourner le plan des conducteurs autour de AA', l'aire balayée par l'ombre *mn* de MN, qui représente la *f. e. m.* induite, deviendra, pour le même déplacement, de plus en plus petite, jusqu'à s'annuler pour la position AB_2, $A'B'_2$.

Digitized by Google

induction électro-magnétique, est égale au quotient de la somme de tous les flux de force coupés par toutes les portions du circuit, par la résistance totale de ce circuit.

461. — EXEMPLES NUMÉRIQUES. — Donnons maintenant quelques exemples numériques des lois de l'induction, afin de bien faire comprendre l'emploi des unités.

Soit un fil de 100^m *de long se mouvant dans un plan horizontal, à la surface du globe, avec une vitesse de* 10^m *par seconde perpendiculairement au méridien magnétique; on demande la force électro-motrice et la quantité d'électricité induites dans le fil, en supposant que sa résistance soit de* $\frac{1}{10}$ *d'ohm.*

Calcul de la force électro-motrice induite. — Nous savons que l'intensité du champ magnétique doit être comptée perpendiculairement à la direction du mouvement du fil; c'est donc la composante verticale du champ terrestre que nous avons à considérer; la valeur de cette composante à Paris est 0,42, la *f. e. m.* d'induction aura donc pour valeur

$$0{,}42 \times (100 \times 100)^{cent.} \times 1000^{cent.\ p.\ s.} = 4.200.000 \text{ unités C. G. S.}$$

Or, nous avons vu (153) que le volt vaut 100.000.000 d'unités C. G. S.; donc, en volts, cette *f. e. m.* sera égale à

$$\frac{4\,200\,000}{100\,000\,000} = 0^v{,}042$$

soit un peu plus de $\frac{1}{25}$ de volt.

Calcul de la quantité d'électricité induite. — La résistance du circuit étant de 0,1 d'ohm, l'intensité du courant sera

$$I = \frac{0{,}042}{0{,}1} = 0{,}42 \text{ d'ampère,}$$

soit une quantité d'électricité égale à 0,42 de coulomb.

Vérifications de la formule $Q_1 = \frac{\mathcal{F}}{R}$. — Remarquons d'abord que 0,42 de coulomb = 0,042 d'unité de quantité C. G. S.; ceci posé, cherchons $\mathcal{F}$; c'est le flux total coupé pendant une seconde, c'est-à-dire pendant 10^s; il a donc pour valeur

$$\mathcal{F} = 0{,}42 \times 100 \times 100 \times 1000 = 4\,200\,000 \text{ C. G. S.;}$$

d'autre part, la résistance du fil en unités C. G. S. sera

$$0{,}1 \times 1\,000\,000\,000 \text{ C. G. S.;}$$

donc

$$R = 100\,000\,000$$

Digitized by Google

et

$$Q_1 = \frac{4\,200\,000}{100\,000\,000} = 0{,}042 \text{ de C. G. S.}$$

462. — AUTRE EXEMPLE. — Nous allons chercher quelle devrait être la longueur d'un fil semblable à celui de l'application précédente et animé de la même vitesse, pour produire une différence de potentiel de 1 volt.

En appelant $\mathcal{F}$ le flux de force coupé par seconde, on a, puisque 1 volt vaut 100 000 000 d'unités C. G. S.,

$$E = \mathcal{F} = 100\,000\,000.$$

D'un autre côté, le flux magnétique vertical du globe terrestre est égal, par mètre carré, à

$$0{,}42 \times 10\,000 = 4\,200.$$

Par suite, pour produire une différence de potentiel de 1 volt, le fil devrait balayer par seconde une surface de

$$\frac{100\,000\,000}{4\,200} = 23\,800^{m^2},$$

et, comme le fil est animé d'une vitesse de 10^m par seconde, il devra avoir 2 380 mètres de long.

463. — Autre forme de l'expression de la f. e. m. induite. Théorème du flux de force embrassé. — Soit un circuit déformable ABCD (fig. 245) dont les différentes parties peuvent prendre

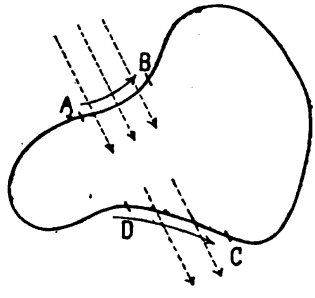

Fig. 245

des positions quelconques dans l'espace. Considérons deux portions AB et CD, de ce circuit placé dans un champ magnétique, et soient $\mathcal{F}_1$ le flux qui entre par la portion AB, pendant l'unité de temps, à l'intérieur du circuit; $\mathcal{F}_2$ le flux qui sort de ce circuit par

Digitized by Google

la portion CD pendant le même temps. Dans AB, le flux $\mathcal{F}_1$ développera une *f. e. m.* $E_1 = \mathcal{F}_1$, dont le sens est indiqué sur la figure par une flèche; tandis que le flux $\mathcal{F}_2$ développera dans CD une *f. e. m.* $E_2 = \mathcal{F}_2$, de même sens, mais tendant à s'opposer à la première puisque le circuit est fermé; la *f. e. m.* résultante E sera égale à la différence des deux *f. e. m.*

$$E_1 - E_2 = \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 = E.$$

En appliquant le même raisonnement à toutes les portions du circuit, on trouve que *la f. e. m. développée dans un circuit fermé, placé dans un champ magnétique, est égale à l'excès des flux de forces qui y entrent sur ceux qui en sortent, pendant l'unité de temps.*

C'est ce qu'on exprime couramment en disant que *la f. e. m. développée dans un circuit fermé, rigide ou non, dont toutes les parties ont un mouvement quelconque dans l'espace, est égale à la variation du flux de force embrassé par le périmètre du circuit pendant l'unité de temps.*

464. — Expression de la quantité d'électricité mise en mouvement par la force électro-motrice d'induction. — On peut trouver facilement l'expression de la quantité d'électricité, mise en mouvement par la *f. e. m.* d'induction, pendant un temps *dt*, dans un circuit fermé ; on a, en effet

$$E = \frac{d\mathcal{F}}{dt},$$

expression dans laquelle $d\mathcal{F}$ est la variation du flux de force embrassé par le circuit, pendant le temps *dt*.

On en conclut, en désignant par R la résistance du circuit

$$I = \frac{d\mathcal{F}}{R dt},$$

d'où

$$I dt = \frac{d\mathcal{F}}{R},$$

mais

$$I dt = dQ.$$

On en déduit le théorème suivant :

Digitized by Google

La quantité d'électricité mise en mouvement par la f. e. m. d'induction dans un circuit fermé, est égale au quotient de la variation du flux de force magnétique embrassé par ce circuit, par sa résistance, quelle que soit la durée pendant laquelle s'effectue cette variation.

465. — REMARQUE. — On voit qu'une analogie complète existe entre ces divers théorèmes et ceux qui sont relatifs au travail produit par un courant électrique qui se déplace dans un champ magnétique (404-405).

§ 2. — APPLICATIONS DES LOIS DE L'INDUCTION DUE AU MOUVEMENT D'UN CONDUCTEUR DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE.

466. — Étude du mouvement d'un fil rectiligne parcouru par un courant et se déplaçant dans un champ magnétique en produisant un travail.

Reprenons le cas (456) d'un fil rectiligne MN se mouvant sur deux conducteurs parallèles sans résistance AB, A'B' (l'ensemble

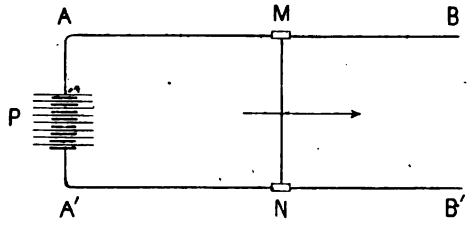

Fig. 246

formant un circuit parcouru par le courant d'une pile P), placés dans un champ magnétique uniforme dont les lignes de force sont perpendiculaires au plan ABA'B' (fig. 246). Si on appelle, E_0 la *f. e. m.* de la pile, E_1 la force électro-motrice d'induction créée par le champ magnétique dans le conducteur MN pendant son déplacement, R la résistance de l'ensemble, on aura, pour valeur du courant I parcourant MN

$$I = \frac{E_0 - E_1}{R}$$

Digitized by Google

Mais en désignant, pour simplifier l'écriture, par L la longueur du fil MN, que nous avons désignée jusqu'à présent par l_n, nous aurons

$$E_1 = \mathcal{H}LV$$

et, si on appelle F la force qui sollicite le fil MN à se déplacer sur AB, A'B', on a

$$F = \mathcal{H}LI = \frac{\mathcal{H}L(E_0 - E_1)}{R},$$

ou, en remplaçant E_1 par sa valeur

$$F = \frac{\mathcal{H}L(E_0 - \mathcal{H}LV)}{R},$$

d'où l'on tire

$$V = \frac{\mathcal{H}LE_0 - FR}{\mathcal{H}^2L^2} = \frac{E_0}{\mathcal{H}L} - \frac{R}{\mathcal{H}^2L^2} \cdot F.$$

On remarquera que si l'on fait dans cette formule

$$F = 0$$

on aura, en appelant V_0 la valeur correspondante de V

$$V_0 = \frac{E_0}{\mathcal{H}L}.$$

V_0 est la vitesse que prendrait le fil si la force F était nulle ; le courant est alors nul et il n'y a aucune dépense d'énergie.

Si, au contraire, on fait dans la formule générale

$$V = 0$$

on a

$$F_0 = \mathcal{H}L\frac{E_0}{R},$$

F_0 est l'effort maximum que produirait le courant égal alors à $\frac{E_0}{R}$, le fil étant en repos et n'étant plus le siège d'aucune *f. e. m.* d'induction.

467. — Représentation graphique de la relation qui existe entre F et V. — L'équation qui lie V à F, étant du premier degré, représente une droite AB. Si on désigne par F_0 et V_0 les coordonnées OA et OB (fig. 247) de l'intersection de cette droite avec l'axe

Digitized by Google

des forces OF et l'axe des vitesses OV, on peut mettre l'équation sous la forme générale

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1,$$

ou, en remplaçant x, y, OA et OB par leurs valeurs dans le cas actuel,

$$\frac{F}{F_0} + \frac{V}{V_0} = 1,$$

équation dans laquelle il n'entre que des quantités d'ordre mécanique.

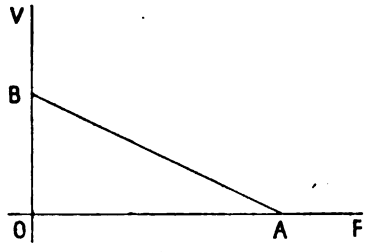

Fig. 247

Nous retrouverons cette équation dans la théorie des moteurs électriques et nous montrerons qu'elle représente précisément la relation qui existe entre le couple moteur développé par une turbine hydraulique et la vitesse de rotation correspondant à ce couple.

468. — Cas où la source extérieure d'électricité est supprimée. — Effort nécessaire pour déplacer le conducteur dans le champ magnétique. — Reprenons le problème du conducteur se mouvant dans un champ magnétique uniforme sous l'action d'une force extérieure, mais en supprimant la source d'énergie électrique, comme nous l'avons déjà fait pour trouver la quantité d'électricité induite. La *f. e. m.* due à cette source étant nulle, on aura

$$E_0 = 0,$$

la *f. e. m.* d'induction développée pendant le déplacement du conducteur sera

$$E_i = \mathcal{H}LV,$$

Digitized by Google

et le courant qui en résulte

$$I = \frac{E_1}{R} = \frac{\mathcal{H}LV}{R}.$$

La force qui tend à s'opposer au mouvement du fil est

$$F = \mathcal{H}LI = \frac{\mathcal{H}^2L^2V}{R}.$$

Si, d'un autre côté, on désigne par

ρ la résistance spécifique du conducteur mobile,

u son volume,

on a (290)

$$u = \frac{\rho L^2}{R},$$

d'où

$$\frac{L^2}{R} = \frac{u}{\rho}.$$

L'équation

$$F = \frac{\mathcal{H}^2L^2V}{R}$$

devient donc

$$F = \frac{\mathcal{H}^2u}{\rho}V.$$

Nous avons supposé, bien entendu, que les deux conducteurs AB, A'B' étaient sans résistance.

On voit donc que l'effort qu'il faut appliquer au conducteur pour le déplacer dans un champ magnétique, est *proportionnel à la vitesse, au carré de l'intensité du champ, au volume du conducteur et inversement proportionnel à la résistance spécifique du conducteur.*

Il est bon de remarquer que l'on a là le seul exemple connu d'une *force proportionnelle à la vitesse* du mobile auquel elle est appliquée. Nous allons décrire quelques applications de cette propriété des courants induits développés dans un conducteur en mouvement dans un champ magnétique.

469. — Force électro-motrice produite par la rotation d'un cadre conducteur dans un champ magnétique. — Soit un conducteur circulaire (fig. 248) se mouvant autour d'un axe XY dans

Digitized by Google

un champ magnétique dont les lignes de forces sont perpendiculaires au plan de la figure.

Nous savons que la *f. e. m.* d'induction, créée par le mouvement du cadre, a pour expression le quotient de la variation du flux de force embrassé, par la durée de cette variation.

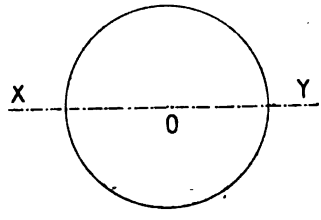

Fig. 248

En appelant $\mathcal{H}$ l'intensité du champ, α l'angle que fait le plan du cadre avec les lignes de force, ce flux a pour valeur

$$\mathcal{F} = \mathcal{H} S \sin \alpha,$$

formule dans laquelle S sin α représente la projection, sur un plan parallèle aux lignes de force, de la surface S du cadre pour un angle α.

En différentiant cette expression, pour avoir la variation $d\mathcal{F}$ du flux pendant un temps dt, il vient

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \mathcal{H} S \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt},$$

or, $\frac{d\alpha}{dt}$ représente la vitesse angulaire [1] ω du cadre; on voit donc que la *f. e. m.* induite E est, à chaque instant, donnée par l'équation

$$E = \omega \mathcal{H} S \cos \alpha.$$

Cette *f. e. m.* est variable ainsi que le courant qui change deux fois de signe dans un tour et dont l'expression sera

$$I = \frac{\omega \mathcal{H} S \cos \alpha}{R},$$

R étant la résistance du cadre.

---

(1) Nous rappelons ici que l'angle s'exprime par le rapport de l'arc au rayon et non pas en degrés.

Digitized by Google

Si ce dernier se compose de n spires on aura, pour la valeur du courant

$$I = \frac{n\omega\mathcal{H}S\cos\alpha}{R}.$$

470. — Quantité d'électricité induite dans le circuit du cadre. — La quantité d'électricité induite dans le circuit du cadre pendant un quart de révolution, s'obtiendra en divisant la variation totale du flux qui est $S\mathcal{H}$ par la résistance R du circuit et en multipliant le tout par le nombre n de spires ; on a donc

$$q = \frac{nS\mathcal{H}}{R}.$$

Dans le quart de révolution suivant, la quantité d'électricité induite aura une valeur numérique égale mais de signe contraire, de telle façon qu'au bout d'un demi-tour, la quantité totale d'électricité induite est algébriquement nulle.

Remarque. — Nous verrons dans la suite que les expressions de I et de q ne sont pas tout à fait exactes, parce que la production d'un courant alternatif dans le cadre que nous venons de considérer, fait naître des *f. e. m.* perturbatrices qui s'ajoutent à la *f. e. m.* due au mouvement seul ; de sorte que les formules que nous venons de donner ne peuvent être considérées que comme approximativement vraies et sous réserve que la vitesse angulaire soit faible.

471. — Redressement des courants. — Commutateur à coquille. — L'équation qui donne la valeur de I, montre que le courant change de signe à chaque demi-révolution, on engendre donc des courants alternatifs. On peut faire passer ces courants dans un circuit extérieur en coupant la spire et en attachant chaque extrémité du circuit mobile à une bague correspondante isolée et montée sur l'axe de rotation ; deux balais frotteurs servent à recueillir les courants alternatifs (fig. 249).

Si on veut avoir dans le circuit extérieur des courants ayant toujours le même sens, on emploiera la disposition représentée par la figure 250. Le *collecteur* ou *commutateur* est alors composé de

Digitized by Google

deux coquilles isolées auxquelles viennent s'attacher les extrémités libres de la spire ou du cadre mobile ; deux balais frotteurs servent à recueillir le courant ; ces balais sont placés dans une position telle que les deux coquilles changent de balais au moment où le courant change de direction dans le cadre induit. On aura ainsi une série de

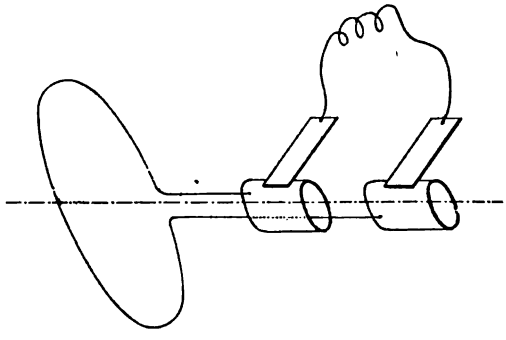

Fig. 249

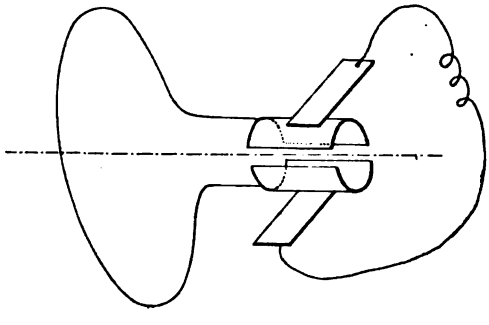

Fig. 250

courants *redressés*, mais non continus, puisqu'ils passeront par une valeur nulle à chaque demi-révolution.

On peut diminuer beaucoup ces variations considérables dans l'intensité du courant, en groupant en tension deux cadres identiques faisant entre eux un angle droit et munis chacun d'un commutateur redresseur.

Le maximum d'intensité du courant qui se développe dans le deuxième cadre, aura lieu précisément au moment où le courant du

Digitized by Google

premier cadre passera par une valeur nulle. Le courant total recueilli, aura toujours le même signe et ne s'annulera jamais.

Enfin, si au lieu de deux cadres faisant entre eux un angle droit, nous en employons n faisant entre eux un angle égal à $\frac{2\pi}{n}$ et possédant chacun son commutateur et ses balais, le courant recueilli se rapprochera de plus en plus d'un courant continu.

Nous aurons l'occasion de revenir sur ce sujet quand nous aborderons la question des machines à courants continus.

472. — Impossibilité de produire un courant continu au moyen de l'induction exercée sur un circuit fermé indéformable, en mouvement dans un champ magnétique. — La *f. e. m.* d'induction étant proportionnelle à la variation du flux de force $d\mathcal{F}$ embrassé par un circuit pendant l'unité de temps, on a

$$E = \frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

Dans le cas d'une machine produisant une *f. e. m.* constante E_1, il faudrait que l'on eût

$$d\mathcal{F} = E_1 dt,$$

d'où, en intégrant

$$\mathcal{F} = E_1 t + \text{Constante}$$

ce qui veut dire que dans la machine ainsi considérée, devant engendrer un courant continu, *le flux de force croîtrait proportionnellement au temps, c'est-à-dire indéfiniment.*

473. — Il n'est donc possible d'obtenir une *f. e. m.* constante par le mouvement d'un circuit dans un champ magnétique, qu'à la condition que le flux de force magnétique embrassé par ce circuit augmente proportionnellement au temps.

On pourrait satisfaire à cette condition de deux manières différentes ; soit en augmentant indéfiniment l'intensité du champ magnétique parcouru par le circuit, ce qui est physiquement impossible ; soit en faisant croître sans limite l'aire embrassée par le circuit se mouvant dans un champ constant. On peut réaliser cette dernière condition au moyen de la disposition suivante (fig. 251).

Digitized by Google

Deux solénoïdes S et S′ traversés par un courant font naître un champ magnétique intense entre les épanouissements f et f′ des noyaux de fer sur lesquels ils sont enroulés ; entre les deux faces

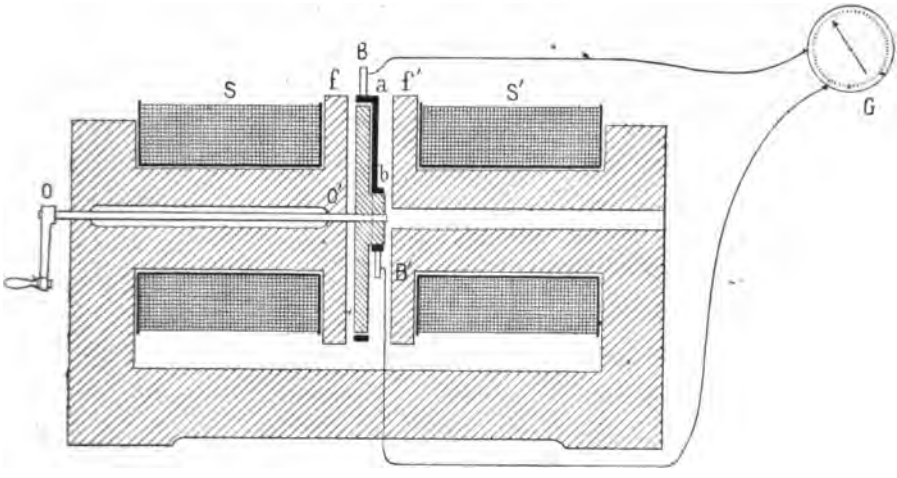

Fig. 251

de ces épanouissements, est placé un plateau circulaire en matière isolante, monté sur un axe OO′ coïncidant avec l'axe des solénoïdes et auquel on peut imprimer un mouvement de rotation.

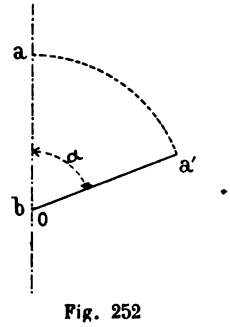

Fig. 252

Sur le plateau isolant est disposée, suivant un rayon, une barre métallique *ab* communiquant d'une part, en *a*, avec un anneau métallique entourant le plateau mobile et, d'autre part en *b*, avec une bague isolée ; deux balais B et B′ servent à recueillir le courant engendré par la rotation du disque qui donne naissance à une *f.e.m.* constante. En effet le flux de force embrassé par le secteur circu-

Digitized by Google

laire aba' (dont l'un des côtés ab est fixe, tandis que le côté $a'b$ tourne avec une vitesse uniforme), compté à partir d'une origine quelconque oa (fig. 252), croît proportionnellement à l'angle aba', c'est-à-dire proportionnellement au temps. Nous allons calculer la valeur de ce flux de force.

L'aire balayée pendant que le conducteur ab décrit un angle α, est égale à

$$\frac{1}{2}\alpha R^2,$$

R désignant la longueur du conducteur ab.
Le flux embrassé sera

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{H}\alpha R^2,$$

différentiant pour avoir la variation de flux de force par unité de temps, il vient

$$E = \frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{1}{2}\mathcal{H}\frac{d\alpha}{dt}R^2;$$

or, en désignant par ω la vitesse angulaire du disque, on a

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega,$$

par suite,

$$E = \frac{1}{2}\omega\mathcal{H}R^2,$$

La f. e. m. est donc proportionnelle à la vitesse angulaire du disque, à l'intensité du champ magnétique et au carré de la longueur du conducteur tournant.

474. — EXEMPLE NUMÉRIQUE. — Supposons que le champ magnétique créé entre les deux épanouissements polaires de l'appareil précédent, ait pour valeur

$$\mathcal{H} = 5000 \text{ unités C. G. S.},$$

prenons $ab = R = 10^{cm}$ et supposons la vitesse du disque égale à 20 tours par seconde [1]; la vitesse angulaire ω a pour valeur

$$\omega = 20 \times 2\pi = 125{,}6,$$

(1) Rappelons que la vitesse angulaire est représentée par l'arc décrit dans une seconde : un tour par seconde est donc égal à 2π.

Digitized by Google

d'où

$$E = \frac{1}{2} 125{,}6 \times 5000 \times 100,$$

$$E = 0^{volt},314.$$

475. — Nous voyons, par cet exemple, qu'un seul conducteur *ab* produit déjà une *f. e. m.* appréciable; on pourrait à la rigueur l'augmenter autant qu'on le voudrait en répartissant sur la surface du disque mobile d'autres conducteurs tels que *ab*, faisant entre eux des angles égaux et aboutissant chacun à deux bagues collectrices ayant chacune un frotteur spécial. En groupant ces divers éléments en tension, on obtiendrait une *f. e. m.* proportionnelle à leur nombre; cette disposition serait très compliquée, mais c'est malheureusement la seule que l'on puisse employer.

Il est bon, en effet, de remarquer que si on faisait une spire complète, c'est-à-dire, si on revenait au centre du disque, après

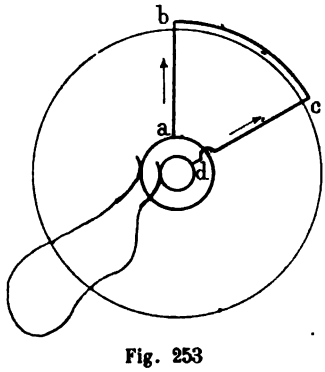

Fig. 253

avoir décrit le contour *abcd* (fig. 253), la *f. e. m.* développée dans le conducteur *cd* ferait équilibre à celle développée dans *ab* et il n'y aurait plus de courant.

476. — Si l'on pouvait supprimer la *f. e. m.* qui prend naissance dans le conducteur *cd*, les deux balais seraient ramenés tous les deux au centre, et l'appareil donnerait la même force électro-motrice que l'appareil de la figure 251. Pour multiplier cette *f. e. m.* par un

Digitized by Google

nombre quelconque n, il suffirait de constituer le contour *abcd* au moyen de n spires identiques formant un fil continu dont les deux extrémités aboutiraient aux deux bagues sur lesquelles s'appuient les balais.

Pour obtenir cette neutralisation de la *f. e. m.* développée dans le conducteur *cd*, on a eu l'idée de l'entourer d'un tube de fer *t* (fig. 254) à parois très épaisses. On espérait ainsi, que les lignes de force du champ magnétique, suivant de préférence le chemin métallique qui leur était offert par les parois du tube, ne couperaient plus le conducteur *ab* et par conséquent ne produiraient pas de *f. e. m.* dans ce fil.

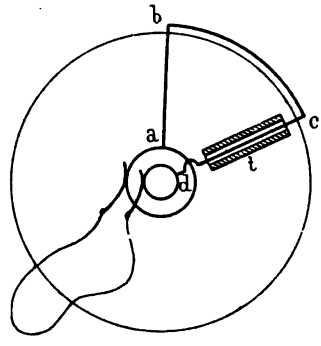

Fig. 254.

Nous avons vu (408-410) que l'on avait déjà essayé une disposition analogue pour réaliser un moteur électrique dépourvu d'inverseur de courant, et nous avons démontré que la présence du tube de fer n'avait aucune espèce d'influence. La démonstration que nous avons donnée, s'applique intégralement au cas actuel et l'expérience confirme complètement les prévisions de la théorie.

Nous reviendrons du reste sur cette question en traitant des *machines dynamos-électriques*.

Mais, on peut conclure des considérations précédentes, que pour obtenir un courant continu, il faut, dans la pratique, avoir recours à des machines à courants alternatifs redressés ; à moins qu'on ne se contente d'une *f. e. m.* très faible.

Digitized by Google

477. — Courant produit dans une bague glissant le long d'un aimant. — Considérons un aimant cylindrique NS (fig. 255) le long duquel se meut une bague conductrice B. Il est évident que

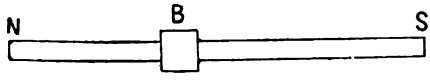

Fig. 255

la *f. e. m.* développée à chaque instant dans la bague est la même dans des portions égales de cette bague et, si on désigne par e_1 la *f. e. m.* engendrée dans l'unité d'arc, pour un arc α, la *f. e. m.* aura pour valeur

$$e = e_1\alpha,$$

et par conséquent la *f. e. m.* totale développée dans la bague entière, sera égale à $2\pi e_1$. De même, si on désigne par r_1 la résistance de l'unité d'arc, la résistance d'un arc α, sera αr_1 et la résistance de la bague entière, sera égale à $2\pi r_1$; de sorte que l'intensité du courant dans la bague considérée comme un circuit fermé, aura pour expression

$$I = \frac{2\pi e_1}{2\pi r_1} = \frac{e_1}{r_1}.$$

Cherchons maintenant quelle est la *d. d. p.* $(V_0 - V_1)$ entre les deux extrémités d'un arc correspondant à l'angle α.

En désignant par e la *f. e. m.* développée dans l'arc α_1 et par r la résistance de cet arc, on a d'après la loi d'Ohm,

$$I = \frac{e + (V_0 - V_1)}{r},$$

d'où

$$V_0 - V_1 = rI - e.$$

Remplaçant respectivement r, e et I par αr_1, αe_1, et $\frac{e_1}{r_1}$, il vient

$$V_0 - V_1 = 0 ;$$

ainsi donc la différence de potentiel entre deux points quelconques de la bague est nulle ; il y a cependant un courant et tout le travail nécessaire pour l'engendrer se transforme en chaleur.

Digitized by Google

478. — Représentation de la résistance d'un conducteur par une vitesse. — Reprenons le cas d'un fil rectiligne glissant sur deux conducteurs dans le champ magnétique terrestre (468) ; remplaçons la pile par une boussole des tangentes T dont le cadre coïncide avec le plan du méridien magnétique (fig. 256).

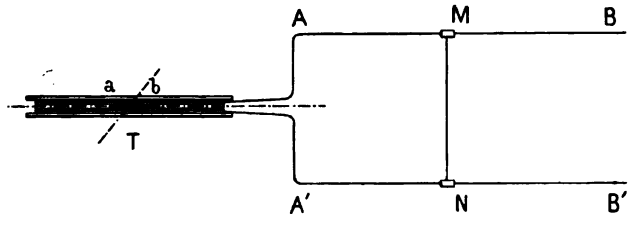

Fig. 256

Si on désigne par $\mathcal{H}_y$ la composante verticale du champ magnétique terrestre, le courant engendré dans le circuit MATA'N, a pour expression

$$I = \frac{\mathcal{H}_y LV}{R}.$$

Ce courant traverse la boussole des tangentes et fait dévier l'aiguille aimantée ; si on appelle $\mathcal{M}$ le moment magnétique de l'aiguille, α l'angle dont elle dévie, et n le nombre de spires du cadre, on a, pour la valeur du couple développé par le courant (381),

$$\frac{2\pi n I \mathcal{M} \cos\alpha}{r},$$

r étant le rayon du cadre.

Mais puisqu'il y a équilibre, ce couple est nécessairement égal et opposé à celui développé sur l'aiguille par le magnétisme terrestre

$$\mathcal{H}_y \mathcal{M} \sin\alpha,$$

on a donc

$$\frac{2\pi n I \mathcal{M} \cos\alpha}{r} = \mathcal{H}_y \mathcal{M} \sin\alpha,$$

d'où

$$I = \frac{\mathcal{H}_y r \operatorname{tg}\alpha}{2\pi n}.$$

Digitized by Google

Égalant les deux valeurs de I, on a

$$\frac{\mathcal{H}_y r \operatorname{tg} \alpha}{2\pi n} = \frac{\mathcal{H}_y \mathrm{LV}}{\mathrm{R}},$$

d'où

$$\mathrm{R} = \frac{2\pi n \mathrm{LV}}{r \operatorname{tg} \alpha}.$$

Or, dans cette formule n est un nombre abstrait ; c'est le nombre de spires du fil enroulé sur le cadre ; le rapport $\frac{\mathrm{L}}{r}$ est le rapport de deux longueurs, indépendant, par suite, du choix des unités ; on voit donc finalement que R et V sont du même ordre de grandeur.

Il ne faut voir dans ce résultat qu'une simple spéculation de l'esprit ; il a, cependant, servi de principe à plusieurs méthodes de mesure de l'unité électro-magnétique de résistance, comme nous le verrons plus tard quand nous parlerons des mesures électriques ; nous allons en donner, du reste, de suite un exemple.

479. — Mesure absolue d'une résistance. — L'expérience que nous venons d'indiquer et qui permet de déduire la mesure d'une résistance de celle d'une vitesse, serait très difficile, sinon impossible, à réaliser. Mais nous allons voir que, en la modifiant légèrement, on peut au contraire la rendre non seulement facile, mais encore susceptible d'un degré de précision assez élevé.

Au lieu d'imprimer au conducteur mobile un mouvement de translation, nous pouvons en effet le fixer à un disque vertical mobile autour d'un axe horizontal situé dans le méridien magnétique et animé d'une vitesse angulaire ω.

Le calcul développé dans le n° 473 nous fera connaître immédiatement la *f. e. m.* engendrée. En désignant par l_1 le rayon de la bague correspondante au balai extérieur ; par l_0, le rayon de la seconde bague, celle qui est le plus rapprochée de ce centre (fig. 251) ; et par h la composante horizontale du champ magnétique terrestre, on a

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2} \omega h (l_1^2 - l_0^2).$$

Digitized by Google

L'intensité du courant *continu* qui traverse le circuit fermé du conducteur mobile et de la boussole des tangentes intercalée dans ce circuit, a pour valeur

$$I = \frac{E}{R} = \frac{\omega h(l_1^2 - l_0^2)}{2R}.$$

La déviation de l'aiguille aimantée placée au centre du cadre circulaire de rayon r, contenant n spires, sera donnée par la formule

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi n I}{hr} = \frac{\pi n \omega (l_1^2 - l_0^2)}{Rr},$$

de laquelle on tire

$$R = \frac{\pi n \omega (l_1^2 - l_0^2)}{r \operatorname{tg} \alpha}.$$

480. — Exemple numérique. — Soit $R = 1$ Ohm $= 1000000000$ d'unités C. G. S. ; $l_1 = 1$ mètre $= 100$ centimètres ; $l_0 = 0$; $n = 100$ spires ; $\omega = 50$ ou environ 8 tours par seconde ; $r = 10$ centimètres. On trouve

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3{,}1416 \times 100 \times 50 \times 10000}{1000000000 \times 10} = 0{,}0157.$$

Ce procédé, permettant de ramener la mesure d'une résistance à celle d'un certain nombre de longueurs et d'une vitesse angulaire, constitue ce que nous sommes convenus d'appeler une mesure absolue.

La résistance d'un conducteur étant du même ordre de grandeur qu'une vitesse et cette dernière quantité s'exprimant dans le système C. G. S. en centimètres par seconde, on dit souvent que l'unité de résistance est égale à $\frac{\text{un centimètre}}{\text{une seconde}}$.

L'Ohm ayant été choisi de façon à contenir un milliard d'unités C. G. S., vaut donc $\frac{\text{dix millions de mètres}}{\text{une seconde}}$.

§ 3. — COURANTS INDUITS DÉVELOPPÉS DANS UNE MASSE MÉTALLIQUE EN MOUVEMENT DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE.

481. — **Expérience d'Arago. — Disque de Faraday.** — Jusqu'à présent nous n'avons considéré que l'induction développée dans des conducteurs filiformes en mouvement dans des champs

Digitized by Google

magnétiques ; il est évident que les phénomènes d'induction auxquels donnent lieu ces déplacements se retrouvent dans le cas de masses métalliques.

Les lois élémentaires de l'induction sont d'ailleurs les mêmes dans les deux cas, c'est-à-dire que la *f. e. m.* développée en un point quelconque d'une masse métallique en mouvement, est proportionnelle à l'intensité du champ magnétique au point considéré, et à la vitesse de ce point, cette vitesse étant comptée perpendiculairement à la direction des lignes de force ; enfin cette *f. e. m.* est dirigée suivant la normale au plan déterminé par la direction de la vitesse et celle du champ. Il résulte de là que la grandeur et la direction des *f. e. m.* élémentaires développées dans l'intérieur de la masse métallique, varie d'une façon continue d'un point à l'autre ; il en est de même des courants élémentaires dont l'intensité et la direction dépendent non seulement des *f. e. m.*, mais aussi de la conductibilité et de la forme du corps. On comprend que la détermination théorique de l'intensité du courant en chaque point, conduise, dans le cas le plus général à des calculs d'une extrême complication ; aussi le problème n'est-il accessible à l'analyse que dans quelques cas particuliers.

Quelle que soit d'ailleurs la distribution des courants dans l'intérieur des masses métalliques, leur existence a pour conséquence, d'après la loi de Joule, une certaine production d'énergie calorifique qui exige, à son tour, une dépense équivalente de travail mécanique pour maintenir la masse métallique en mouvement dans le champ magnétique.

On retrouve d'ailleurs ici, les mêmes lois que dans le cas des conducteurs filiformes en ce qui concerne la proportionnalité entre la vitesse de la masse métallique et l'intensité de la force nécessaire pour maintenir cette vitesse constante.

C'est à Arago que l'on doit la découverte des phénomènes mécaniques produits par le mouvement relatif d'une masse métallique et d'un aimant. Il les mit en évidence par l'expérience suivante :

Une aiguille aimantée NS (fig. 257) est suspendue par son centre à un fil de cocon ou à un fil métallique très fin ; au-dessous et à une

Digitized by Google

très petite distance de cette aiguille, est placé un disque en cuivre D horizontal dont le centre est situé sur le prolongement du fil de suspension et qui peut recevoir un mouvement de rotation au moyen d'un système d'engrenages actionné par la manivelle M. L'appareil étant d'abord en repos, l'aiguille se dirige suivant le méridien magnétique, mais si on imprime un mouvement de rotation à la manivelle M, on constate que l'aiguille est déviée d'un angle qui croît avec la vitesse du disque.

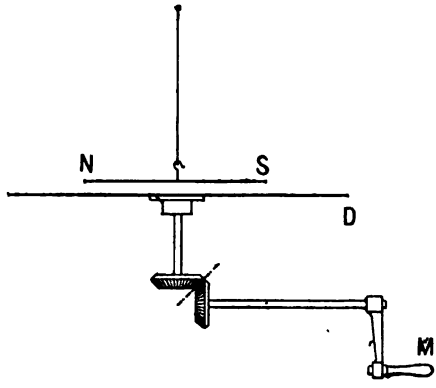

Fig. 257

Les phénomènes d'induction étaient inconnus à l'époque où Arago fit cette expérience pour la première fois, il ne put donc en donner aucune explication ; il donna à la cause inconnue du mouvement de l'aiguille, le nom de magnétisme de rotation.

Tout ce que nous avons dit plus haut montre clairement l'origine de la force développée par le disque en mouvement sur l'aiguille aimantée ; le mouvement relatif de ces deux corps développe, en effet, dans le disque, des *f. e. m.* d'induction donnant naissance à des courants électriques qui exercent à leur tour une action mécanique sur l'aiguille aimantée.

Faraday, le premier, donna cette explication dont il prouva l'exactitude en montrant qu'un disque dans lequel on empêche la production des courants induits (en créant dans sa masse un grand nombre de relations de continuité au moyen de traits de scie équidistants) (fig. 258), ne produit plus l'entraînement de l'aiguille.

Digitized by Google

Il compléta la démonstration en construisant un appareil composé d'un disque en cuivre qui tourne entre les branches d'un aimant dont les pôles sont situés sur une droite parallèle à l'axe de rotation et très près de la circonférence extérieure du disque. En mettant un frotteur au centre du disque et un autre à l'extrémité du rayon qui joint ce centre à la ligne des pôles de l'aimant, et en réunissant ces

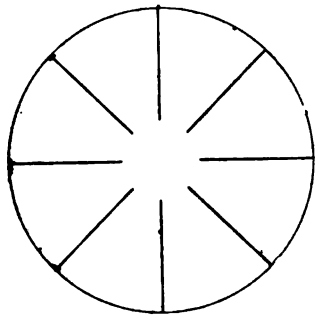

Fig. 258

deux frotteurs par un fil, on obtient dans ce fil un courant continu qui démontre l'existence d'une différence de potentiel entre le centre et la circonférence du disque; c'est là le premier exemple connu d'une machine d'induction à courants rigoureusement continus.

482. — Expérience de Matteucci. — Matteucci a déterminé la forme des courants qui se développent dans le disque métallique de l'expérience d'Arago.

Pour cela, il fit tourner un disque en cuivre PEFP en face des pôles A et B d'un électro-aimant (fig. 259) en fer à cheval; il se développe ainsi des courants qui restent fixes dans l'espace et par suite se déplacent par rapport au disque. Matteuci détermina d'abord la forme des lignes équipotentielles de la surface du disque; dans ce but, il approcha jusqu'au contact de ce dernier en un point P, l'extrémité fixe d'un fil aboutissant à un galvanomètre dont il promenait le second fil sur la surface du disque jusqu'à ce que la déviation de l'aiguille du galvanomètre fût nulle. Il était évident alors

Digitized by Google

que les deux extrémités des fils du galvanomètre étaient situées sur une courbe équipotentielle. On peut donc obtenir autant de points que l'on veut en déplaçant le second fil du galvanomètre. Lorsque l'on a déterminé ainsi un certain nombre de courbes équipotentielles, il suffit, pour construire les courbes représentatives des courants qui sillonnent la surface du disque, de tracer les *trajectoires orthogonales* des courbes équipotentielles. Sur la figure 259, les courbes en traits pleins représentent les lignes équipotentielles et les traits ponctués représentent les courbes des courants.

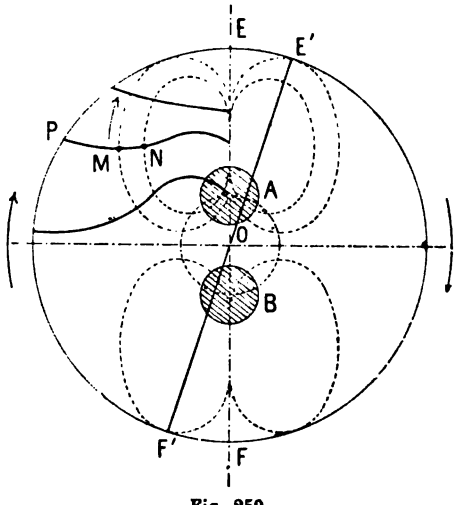

Fig. 259

Matteucci observa le phénomène suivant : pour une faible vitesse toutes les lignes équipotentielles étaient symétriques par rapport aux axes EF et CD ; mais, la vitesse venant à augmenter, l'axe de symétrie EF s'écartait de sa position normale pour venir en E'F', faisant avec EF un angle α proportionnel à la vitesse de rotation du disque.

En se basant sur les expériences que nous venons de décrire, Matteucci en fit un autre qui en était la synthèse.

Il reproduisit, par incrustation de fils métalliques dans un disque en matière isolante, le dessin des courants qu'il avait obtenu par l'expérience précédente, et il fit passer dans ce réseau de conduc-

Digitized by Google

teurs le courant d'une pile; il constata qu'une aiguille aimantée suspendue au centre du disque était déviée de la même façon que dans l'expérience d'Arago.

483. — Expérience de Foucault. — Dans les expériences d'Arago et de Matteucci, le sens des courants qui se forment dans le disque de cuivre est tel qu'ils tendent, en vertu de la loi de Lenz, à s'opposer au mouvement. Foucault a démontré d'une façon très frappante cette application de la loi de Lenz en faisant tourner un disque dans un champ magnétique très intense produit par un fort électro-aimant; le mouvement de rotation du disque étant amplifié par une série d'engrenages, tant que le courant ne passe pas dans l'électro-aimant, on n'éprouve aucun effort à faire tourner le disque; mais dès que le champ magnétique est créé, les courants induits engendrés dans le disque s'opposent au mouvement, comme le ferait un frein, et l'on est obligé de produire sur la manivelle un effort considérable pour maintenir en mouvement le disque dont la température s'élève alors très rapidement. Cet effort est proportionnel à la vitesse.

484. — Indicateur magnétique de vitesse de M. Marcel Deprez. — On peut en se basant sur cette propriété, construire un indicateur de vitesse, comme nous l'avons fait en 1880. Il suffit, en effet, dans l'expression trouvée plus haut (468)

$$F = \frac{\mathcal{H}^2 u}{\rho} V,$$

de connaître F pour en déduire la vitesse V.

L'indicateur de vitesse (fig. 260) se compose d'un aimant en fer à cheval NS mobile autour d'un axe creux, auquel on peut communiquer, au moyen d'une poulie p et d'une courroie, le mouvement de rotation dont on veut mesurer la vitesse.

Entre les branches de cet aimant, se trouve un tube de cuivre (fig. 261) renforcé intérieurement d'un tube de fer dont le rôle est d'augmenter l'intensité du champ magnétique; l'axe de ce tube de

Digitized by Google

cuivre qui coïncide avec celui de l'aimant, est monté sur des couteaux C et C′, comme une balance, et il est muni d'un petit contrepoids M qui tend constamment à le ramener dans une position

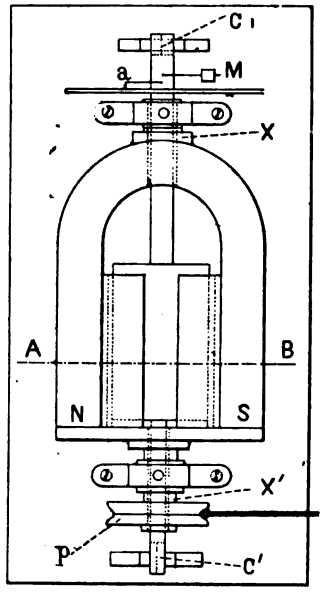

Fig. 260

déterminée ; on peut mesurer ses déviations, pendant la rotation de l'aimant, au moyen d'une aiguille *a* qui se déplace devant un cercle gradué.

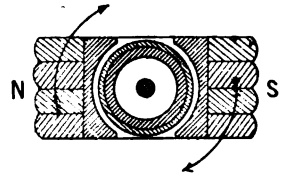

Fig. 261
Coupe suivant AB.

Si on désigne par ω la vitesse angulaire de l'aimant,

f l'effort tangentiel exercé sur le tube lorsque l'aimant est animé d'une vitesse angulaire égale à l'unité,

r le rayon du tube,

Digitized by Google

l la distance de l'axe du tube au centre de gravité de la masse M,

p le poids de la masse M,

α l'angle dont le tube est dévié par suite de l'induction.

L'effort tangentiel étant f pour une vitesse égale à 1, deviendra $f\omega$ pour une vitesse ω; le couple qui en résultera aura pour valeur $f\omega r$ et comme il doit être égal au couple inverse développé par la masse M, on a

$$f\omega r = pl \sin \alpha$$

d'où

$$\omega = \frac{pl}{fr} \sin \alpha,$$

et

$$\sin \alpha = \frac{fr}{pl} \omega,$$

On voit que la vitesse cherchée est proportionnelle au sinus de l'angle et, par suite, à l'angle lui-même, lorsqu'il n'excède pas une vingtaine de degrés, et, que la sensibilité est inversement proportionnelle à pl.

Lorsque l'instrument doit être installé sur un bateau ou sur une locomotive, la force antagoniste qui mesure la force d'entraînement est produite par un ressort en spirale.

485. — Frein électro-magnétique. — On pourrait profiter de l'effort qui s'oppose à la rotation d'un cylindre métallique dans un champ magnétique, pour construire un frein très énergique. Il suffirait en effet d'amplifier le mouvement de rotation des roues par une série d'engrenages communiquant un mouvement rapide à un tambour en cuivre placé dans les épanouissements polaires d'un gros électro-aimant, à la manière d'un induit de machine dynamo-électrique (fig. 262). On graduerait l'effet du frein en envoyant un courant plus ou moins intense dans l'électro-aimant, c'est-à-dire en créant un champ magnétique plus ou moins fort; il est certain que le frein serait d'une très grande souplesse. Il est intéressant à ce sujet de rechercher l'influence qu'a, dans un pareil système, l'amplification de la vitesse au moyen des engrenages.

Digitized by Google

Supposons que le frein soit appliqué à un wagon de chemin de fer ; soit V la vitesse du train et V′ celle de la circonférence du cylindre en cuivre,

F, l'effort tangentiel appliqué à la roue du wagon,

F′, l'effort tangentiel appliqué au cylindre du frein.

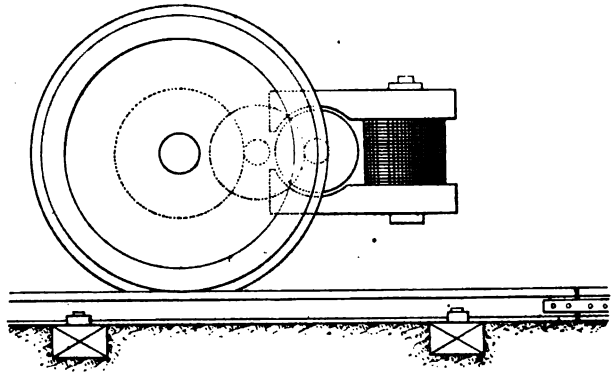

Fig. 262

Supposons, pour simplifier, qu'il n'y ait aucun frottement dans la transmission par engrenages ; on a, à chaque instant en vertu du théorème du travail virtuel

$$FV = F'V'$$

d'où

$$\frac{F}{F'} = \frac{V'}{V};$$

mais, d'autre part, l'effort F′ appliqué au cylindre est proportionnel à la vitesse, c'est-à-dire que

$$F' = f'V',$$

f' étant l'effort développé quand la vitesse tangentielle du cylindre est égale à l'unité.

On a donc, en remplaçant F′ par sa valeur,

$$\frac{F}{f'} = \frac{V'^2}{V} \qquad \text{ou} \qquad FV = f'V'^2;$$

mais

$$V' = KV,$$

Digitized by Google

K étant le rapport d'amplification ; donc

$$FV = f'K^2V^2$$

ou

$$F = K^2f'V,$$

c'est-à-dire que *l'effort est toujours proportionnel à la vitesse du train et au carré du rapport des vitesses linéaires du train et du cylindre.*

486. — Amortissement des oscillations dans les appareils de mesures. — Une autre application peut encore être faite de ces principes en vue d'amortir les oscillations de l'équipage mobile d'un galvanomètre ou d'un électromètre et en général de toute espèce d'appareil de mesure.

On en a un exemple frappant dans le galvanomètre Deprez-d'Arsonval ; le cadre mobile en se déplaçant dans un champ magnétique intense engendre des courants d'induction qui s'opposent à son mouvement et le ramènent ainsi très rapidement au repos.

Dans certains électromètres, on a aussi employé cette disposition comme nous avons déjà eu l'occasion de le dire (177-182).

Il est d'ailleurs essentiel de remarquer que cette force antagoniste s'annulant en même temps que la vitesse, ne modifie en rien la position d'équilibre que prendrait l'équipage mobile si elle n'existait pas.

§ 4. — INDUCTION MUTUELLE PRODUITE PAR LE DÉPLACEMENT RELATIF DE DEUX CIRCUITS PARCOURUS PAR DES COURANTS.

487. — Calcul de la f. e. m. induite. — Considérons deux circuits A et A′ (fig. 263) alimentés chacun par une source d'électricité P, P′, à *f. e. m. variable*, E, E′, destinée à maintenir constantes les intensités I et I′ des courants dans chaque circuit. Cherchons la valeur de la *f. e. m.* d'induction créée dans les circuits A et A′ pendant leur déplacement relatif.

Le circuit A′ est traversé par un flux de force magnétique émané de A ; nous considérerons comme un axiome que le champ magné-

Digitized by Google

tique ainsi créé, produit sur A′ des effets indépendants de son origine ; c'est-à-dire qu'il agit comme s'il émanait d'un aimant permanent. Nous avons vu (456) que l'énergie dépensée par la source pendant le mouvement relatif de A′ par rapport à A est, pendant le temps dt, donnée par l'équation

$$\mathrm{E}\mathrm{I}'dt = \mathrm{R}\mathrm{I}'^2dt + \mathrm{F}.\mathrm{V}.dt,$$

R′ étant la résistance de A′ ; V, la vitesse du mouvement relatif, en supposant que les deux circuits restent parallèles entre eux ; F, la force nécessaire pour produire ce mouvement relatif, mesurée suivant la direction de la vitesse relative.

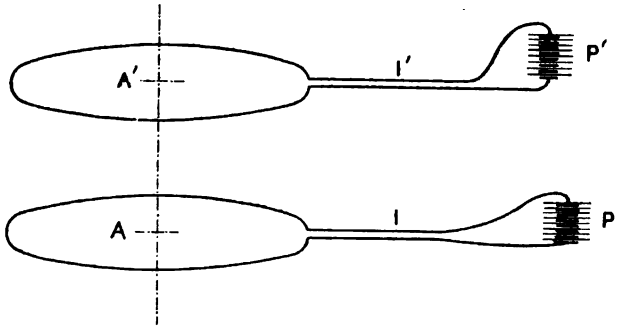

Fig. 263

En appliquant la même équation au circuit A considéré comme animé d'un mouvement relatif par rapport au champ magnétique créé par le circuit A′, on aura

$$\mathrm{E}\mathrm{I}dt = \mathrm{R}\mathrm{I}^2dt + \mathrm{F}.\mathrm{V}.dt,$$

R étant la résistance du circuit A.

D'un autre côté, la formule d'Ampère nous apprend que la force F est proportionnelle au produit des deux courants I et I′ ; on peut donc l'écrire

$$\mathrm{F} = f.\mathrm{I}\mathrm{I}',$$

f étant l'effort développé actuellement par l'action mutuelle des deux circuits et compté dans le sens de leur déplacement relatif, lorsque le courant est égal à l'unité dans chacun d'eux.

En remplaçant F par sa valeur dans les deux premières équations,

Digitized by Google

il vient :

$$E'I'dt = RI'^2dt + fII'Vdt$$

et

$$EIdt = RI^2dt + fII'Vdt,$$

d'où l'on tire

$$E' = RI' + fIV,$$

$$E = RI + fI'V.$$

Or, les produits RI et R'I' sont précisément les valeurs que devraient avoir les *f. e. m.* E' et E pour entretenir les courants I' et I si les *f. e. m.* d'induction étaient nulles; on en conclut que les termes fIV et $fI'V$ représentent des *f. e. m.* d'induction que nous désignerons par E'_1 et E_1 ; nous aurons donc

$$E'_1 = fIV, \qquad E_1 = fI'V.$$

En ajoutant membre à membre les deux premières équations, on a

$$(EI + EI')dt = RI^2dt + RI'^2dt + 2FVdt,$$

or, le premier membre de cette équation représente le travail total engendré par les sources P et P' ; $RI^2dt + R'I'^2dt$ représente la quantité de chaleur totale produite dans les deux circuits, tandis que $2FVdt$ est le double du travail mécanique $FVdt$ dû au déplacement relatif des deux circuits. Nous sommes donc obligés de conclure qu'il se produit, pendant ce déplacement, un travail mécanique d'une nature immesurable et sur lequel nous aurons bientôt l'occasion de revenir.

488. — En se reportant aux formules trouvées pour la *f. e. m.* d'induction, on voit que la *f. e. m.* d'induction développée dans A', est proportionnelle au courant qui passe dans A et réciproquement ; elle est aussi proportionnelle à *f*, *f* étant, bien entendu, compté dans la direction de la vitesse relative.

Si les courants I et I' étaient égaux, les *f. e. m.* d'induction seraient les mêmes dans les deux circuits, *bien qu'ils puissent être de dimensions très différentes.*

Cela tient à ce que l'effort mécanique F exercé par A' sur A est égal et opposé à l'effort mécanique — F exercé par A sur A' et à

Digitized by Google

ce que, en outre, la vitesse relative de A′ par rapport à A est égale et opposée à la vitesse relative de A par rapport à A′.

489. — Nous venons de conclure, dans la recherche de l'induction par déplacement relatif, à l'existence d'un travail d'une nature immesurable, en décomposant le terme $2FV\,dt$ en deux parties, l'une $FV\,dt$, due au travail mécanique développé pendant le déplacement relatif des deux circuits, l'autre, qui ne répond à aucune des formes du travail mécanique directement constatable mais dont nous démontrerons expérimentalement l'existence par les phénomènes qui se manifestent au moment de la rupture du courant. Il est bon de justifier cette conséquence du calcul en recherchant l'origine du mécanisme qui régit ces phénomènes.

Remplaçons, d'abord, les deux circuits A et A′ par deux aimants permanents (fig. 264) ; en amenant de l'infini l'aimant A′ à la posi-

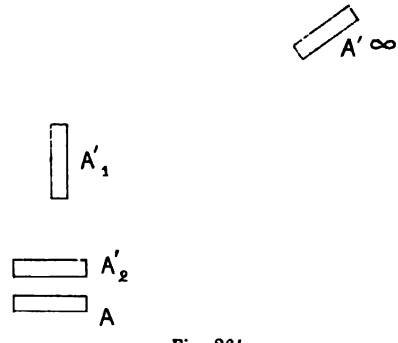

Fig. 264

tion actuelle A'_2, on aura produit évidemment un certain travail, positif ou négatif suivant que A et A′ s'attirent ou se repoussent. On peut du reste produire pratiquement le même travail en choisissant comme point de départ une certaine position intermédiaire A'_1, telle qu'aucun travail n'ait été produit pour amener l'aimant A′ de l'infini à cette position ; il suffira, pour cela, d'amener A′ à la position A'_1 de façon que l'axe du barreau A′ soit constamment tangent à une trajectoire telle que le travail développé le long de cette trajectoire soit constamment nul.

Digitized by Google

En passant de la position A'_1 à la position A'_2, on aura produit le même travail qu'en amenant A′ de l'infini à la position A'_2; ce travail exige une dépense d'énergie; mais l'état des aimants A et A′ n'ayant pas changé, on est amené à conclure que cette énergie a été empruntée au milieu ambiant (Ether) ou emmagasinée dans ce milieu de telle façon qu'elle lui sera restituée ou soustraite, si on reporte A′ à la position A'_1 ou ce qui revient au même à l'infini.

Mais l'aimant A′ peut être remplacé par un circuit parcouru par un courant; et dans ce cas, les conclusions que nous avons tirées de l'expérience (456) dans laquelle un courant, tournant autour d'un pôle d'aimant, produit un travail sans limite bien que la distance du courant au pôle reste constante, nous amènent inévitablement à conclure que ce travail est entièrement fourni par la source du courant.

D'autre part, les propriétés d'un champ magnétique étant indépendantes de son origine, nous pouvons appliquer au système formé par un aimant et par un circuit fermé, les mêmes raisonnements qu'au système formé de deux aimants permanents, et dire que le travail mécanique développé pendant le mouvement relatif du circuit et de l'aimant, a été fourni, d'abord par le milieu ambiant, mais qu'il lui est restitué immédiatement ou ultérieurement par la source d'électricité. Dans le cas où la restitution est immédiate, l'énergie potentielle du milieu reste invariable ; dans le cas contraire, elle augmente ou elle diminue d'une quantité égale à l'excès de l'énergie totale produite par la source, sur le travail mécanique mesurable F.V.*dt*.

Enfin, dans le cas du déplacement de deux circuits, chacun d'eux se comportant comme un aimant par rapport à l'autre, l'énergie est encore intégralement fournie par le milieu ambiant au circuit considéré et restituée à ce milieu par les deux sources d'électricité. Mais nous avons vu que le travail mécanique mesurable, F.V.*dt*, ne représente que la moitié de l'énergie totale fournie par ces deux sources ; nous sommes donc contraints d'admettre qu'une autre quantité d'énergie égale, F.V.*dt*, est emmagasinée dans le milieu ambiant sous forme d'énergie potentielle, et qu'elle doit ma-

Digitized by Google

nifester son existence lorsqu'on supprime le courant qui traverse l'un ou l'autre des circuits. C'est ce qui a lieu, en effet, et nous verrons bientôt que cette énergie ainsi emmagasinée, se manifeste, au moment de la rupture du courant, par la production d'un travail électrique dans le circuit que l'on vient de rompre. En vertu de la conservation de l'énergie, ce travail doit être égal au travail mécanique qui serait développé en éloignant à l'infini l'aimant permanent équivalent au courant que l'on supprime.

490. — Autre méthode de recherche de la f.e.m. d'induction. — On aurait pu trouver la *f.e.m.* d'induction en appliquant le théorème du flux de force embrassé.

En effet, en appelant E'_i la *f.e.m.* d'induction développée par le circuit A sur le circuit A', il vient

$$E'_i = \frac{d\mathcal{F}_{AA'}}{dt},$$

$d\mathcal{F}_{AA'}$ étant la variation, pendant le temps dt, du flux de force émané de A et traversant A'.

En multipliant les deux termes de cette fraction par le déplacement relatif dx des deux circuits pendant l'unité de temps, il vient

$$E'_i = \frac{d\mathcal{F}_{AA'}}{dx}\,\frac{dx}{dt},$$

d'où

$$E'_i = V\frac{d\mathcal{F}_{AA'}}{dx}.$$

D'autre part, le travail élémentaire $d\mathcal{C}$ dû au déplacement relatif des deux circuits, a pour expression, en vertu du théorème du flux de force embrassé (405),

$$d\mathcal{C} = I' d\mathcal{F}_{AA'}.$$

On peut aussi écrire, en désignant par F l'effort mécanique mutuel des deux circuits, compté suivant la direction du déplacement dx

$$d\mathcal{C} = F dx.$$

Donc

$$F dx = I' d\mathcal{F}_{AA'},$$

Digitized by Google

d'où

$$F = \frac{I' d\mathcal{F}_{AA'}}{dx},$$

ou encore

$$\frac{d\mathcal{F}_{AA'}}{dx} = \frac{F}{I'}.$$

Donc enfin

$$E'_1 = V \frac{F}{I'}.$$

Mais en vertu des lois d'Ampère, on a

$$F = fII',$$

f étant la valeur de F correspondant à $I = I' = 1$. On arrive donc enfin à l'équation

$$E'_1 = fIV,$$

expression identique à celle déjà trouvée.

Nous avons supposé naturellement que A et A′ étaient filiformes ; car sans cela, il faudrait répéter la première équation pour chaque spire des systèmes A et A′ et faire une double intégration, le flux de force traversé variant avec les dimensions et les positions des spires. Ceci montre l'élégance de la première démonstration qui est exacte quelles que soient la forme et les dimensions des circuits A et A′.

491. — Quantité d'électricité mise en mouvement dans chaque circuit par le fait de l'induction seule. — Le courant qui circule dans un circuit quelconque où existent deux *f. e. m.* de sens contraire, a pour expression

$$I = \frac{E - E_1}{R}.$$

Pendant un temps dt la quantité d'électricité mise en mouvement sera

$$I dt = \frac{E}{R} dt - \frac{E_1}{R} dt$$

d'où

$$\int I dt = \int \frac{E dt}{R} - \int \frac{E_1 dt}{R};$$

Digitized by Google

le terme $\int \frac{E dt}{R}$ représente la quantité d'électricité mise en mouvement par la *f. e. m.* de la source agissant seule, puisque, si l'induction était nulle, il resterait justement ce terme ; par conséquent le deuxième terme

$$\int \frac{E_1 dt}{R}$$

représente la quantité d'électricité qui est mise en mouvement par l'induction ; en désignant par Q_1 celle qui correspond au circuit A, et en remplaçant E_1 par sa valeur $fI'V$, on a

$$Q_1 = \int \frac{fI'V}{R} dt;$$

on aurait de même

$$Q'_1 = \int \frac{fIV}{R'} dt.$$

Mais $V dt$ est égal au déplacement relatif dx des deux circuits pendant le temps dt ; on a donc finalement

$$Q_1 = \frac{I'}{R} \int f dx$$

$$Q'_1 = \frac{I}{R'} \int f dx;$$

Or, f étant la force mécanique exercée entre les deux bobines et mesurée dans le sens du déplacement relatif, lorsqu'elles sont traversées par l'unité de courant, $f dx$ sera le travail élémentaire accompli pendant le déplacement dx et la somme de tous ces travaux élémentaires sera le travail total développé, quand les bobines se rapprochent depuis l'infini jusqu'à leur position actuelle ; en le désignant par $\mathfrak{C}_1$, on aura

$$\mathfrak{C}_1 = \int f dx ;$$

et par suite

$$Q_1 = \frac{I'}{R} \mathfrak{C}_1, \qquad Q'_1 = \frac{I}{R'} \mathfrak{C}_1.$$

$\mathfrak{C}_1$ a reçu, pour des motifs que nous verrons dans le chapitre suivant, le nom de coefficient *d'induction mutuelle*.

Digitized by Google

492. — Détermination des flux de force embrassés par les deux circuits en fonction du travail développé pendant leur mouvement relatif. — Les forces électro-motrices dans les circuits A′ et A, sont données par les équations :

$$E'_1 = \frac{d\mathcal{F}_{AA'}}{dt} \qquad \text{et} \qquad E_1 = \frac{d\mathcal{F}_{A'A}}{dt},$$

mais, nous venons de voir qu'on peut aussi les mettre sous la forme

$$E'_1 = fIV \qquad \text{et} \qquad E_1 = fI'V.$$

Remplaçant V par $\frac{dx}{dt}$ et intégrant, il vient, en supposant que A′ part de l'infini pour arriver à sa position actuelle,

$$\mathcal{F}_{AA'} = I\int f dx, \qquad \mathcal{F}_{A'A} = I'\int f dx,$$

équations vraies quel que soit le chemin parcouru pour arriver à la position finale relative des deux bobines, parce que, pour amener A′ de l'infini jusqu'à sa position actuelle, le travail dépensé ou produit (I et I′ restant bien entendu constants) est indépendant de la trajectoire parcourue.

493. — Cas où les deux circuits contiennent du fer. — Les formules qui donnent la *f. e. m.* induite en fonction de l'intensité du courant, ne sont plus applicables, parce que le flux de force émané du fer n'est pas proportionnel à l'intensité du courant. Seules, les formules générales

$$E'_1 = \frac{d\mathcal{F}_{AA'}}{dt}$$

$$E_1 = \frac{d\mathcal{F}_{A'A}}{dt}$$

sont encore exactes ; mais, malheureusement, elles restent à l'état de formules algébriques sans application numérique, parce que la loi qui lie le flux de force développé dans le fer au courant inducteur, n'est pas connue.

Nous reviendrons d'ailleurs avec détails sur ce sujet, dans le chapitre suivant.

Digitized by Google

CHAPITRE DEUXIÈME.

INDUCTION MUTUELLE DE DEUX SYSTÈMES ÉLECTRO-MAGNÉTIQUES EN REPOS RELATIF.

---

§ I. — INDUCTION MUTUELLE DE DEUX CIRCUITS FIXES TRAVERSÉS PAR DES COURANTS VARIABLES.

494. — Théorème de Neumann. — Expérience de Felici. — Nous avons vu que quand on amène d'une distance infinie à une certaine position, deux circuits parcourus par des courants, on développe dans chacun d'eux une certaine quantité d'électricité induite (491). Si, dans une deuxième expérience, on supprime le courant dans chacun des circuits et qu'on les amène encore de l'infini à la même position relative, puis que l'on rétablisse les deux courants avec les mêmes intensités que dans la première expérience, on constate qu'il y a production de courants induits dans chacun des circuits. Le théorème de Neumann établit que la quantité d'électricité induite dans les deux cas est la même ; on peut donc l'énoncer ainsi :

La quantité d'électricité induite développée par déplacement relatif dans deux circuits parcourus par des courants, quand on les amène d'une très grande distance à une certaine position relative, est égale à celle qui serait développée si, dans cette position, on rétablissait dans chaque circuit, préalablement ouvert, des courants de même intensité que dans le cas où il y a déplacement relatif.

Felici a démontré ce théorème très important par une expérience à laquelle on peut donner la forme suivante.

Digitized by Google

On prend deux bobines plates A et A′ (fig. 265) de diamètres différents, de façon que l'une A′, puisse facilement entrer dans l'autre A et s'y mouvoir en tournant autour d'un de ses diamètres. A cet effet, la bobine A′ est montée sur pivots et elle est sollicitée à rester constamment dans le même plan que A à l'aide d'un ressort r et d'une corde s'enroulant sur une poulie p ; la bobine A est parcourue par le courant d'une pile P et la bobine A′ est placée dans le circuit d'un galvanomètre G. On peut, à l'aide de ce dispositif, démontrer l'existence de l'induction due au *déplacement relatif* des deux bobines en plaçant d'abord A′ dans un plan perpendiculaire à A (position 1)

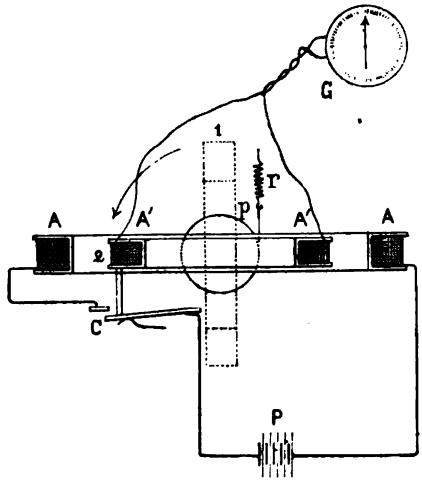

Fig. 265.

et en l'abandonnant ensuite à l'action du ressort qui la ramène brusquement dans le plan de A (position 2); l'aiguille du galvanomètre G sera momentanément déviée.

Faisons maintenant une deuxième expérience ; le circuit A′ étant dans le plan de A, nous démontrerons l'existence de l'induction *sans déplacement relatif* en lançant dans A le courant de la pile P; on constate alors une déviation momentanée au galvanomètre G. Si on interrompt le courant, on constate une deuxième déviation égale à la première mais de sens contraire ; il y a donc eu induction sans déplacement relatif.

Digitized by Google

Il faut maintenant démontrer que la quantité d'électricité induite développée par déplacement relatif est égale à celle développée sans déplacement relatif. Pour cela, on se base sur ce fait (que nous démontrerons dans l'étude des mesures électriques) que l'équipage mobile d'un galvanomètre possède une certaine inertie qui l'empêche de dévier d'une quantité appréciable, si l'on vient à lancer dans son circuit, à des intervalles de temps très rapprochés, deux quantités d'électricité égales mais de signe contraire.

Pour appliquer cette propriété des galvanomètres à l'expérience de Felici, on place dans le circuit A un interrupteur C disposé de telle façon que la bobine A′ interrompt le courant qui traverse A juste au moment où les plans de A et de A′ coïncident. On fait alors l'expérience suivante ; A′ étant maintenu dans un plan perpendiculaire à A, l'interrupteur C est fermé et le circuit A est parcouru par le courant de la pile ; on abandonne A′, le ressort r ramène dans un temps très court, ce circuit dans le plan de A ; une certaine quantité d'électricité induite est ainsi développée dans A′, par suite de son déplacement relatif. Mais au moment où les plans des deux bobines coïncident, l'interrupteur C entrant en jeu, le courant est interrompu dans A, et cette interruption a pour effet de développer dans A′ une quantité d'électricité induite sans déplacement relatif. L'expérience a lieu dans un temps très court grâce à l'énergie du ressort r ; les deux quantités d'électricité induite de sens contraire ainsi développées, l'une par déplacement relatif (mouvement de rotation), l'autre sans déplacement relatif (interruption), traversent le galvanomètre dans un intervalle de temps très court ; comme on ne constate aucune déviation, on en conclut que les deux quantités d'électricité induites sont égales, ce qui démontre le théorème.

Nous avons démontré (464) que la quantité d'électricité induite dans un circuit fermé en mouvement dans un champ magétique, est numériquement égale au quotient de la variation du flux de force embrassé par la résistance du circuit ; *cette variation étant due au mouvement du circuit dans le champ magnétique.* Si l'on admet que le théorème est toujours vrai *quelle que soit l'origine de la variation du*

Digitized by Google

flux de force embrassé, le théorème de Neumann en devient une simple conséquence.

495. — Calcul de la f. e. m. d'induction développée dans deux circuits en repos relatif traversés par des courants variables. — Supposons que les deux circuits A et A′ voisins l'un de l'autre, ne soient d'abord parcourus par aucun courant, et que nous établissions le courant dans A′; d'après le théorème de Neumann, la quantité d'électricité induite dans A sera égale à celle qui aurait été développée si A′ avait été placé à une très grande distance et amené ensuite dans sa position actuelle; le courant I′ ayant une intensité constante pendant ce déplacement. Or nous avons vu que la quantité d'électricité induite dans A par le déplacement de A′, a pour valeur (491)

$$Q_1 = \frac{I'}{R}\mathfrak{C}_1.$$

L'établissement du courant dans A′ supposé en repos, a donc pour conséquence le développement dans A d'une quantité d'électricité représentée par cette équation.

Supposons maintenant que l'intensité I′ soit modifiée et devienne $I' + dI'$; la quantité d'électricité développée dans A, éprouvera elle-même un accroissement dont on déterminera la valeur en différentiant l'équation ci-dessus, ce qui donnera

$$dQ_1 = \frac{dI'}{R}\mathfrak{C}_1.$$

En divisant les deux membres par le temps dt, nécessaire pour que l'intensité du courant varie de dI', on trouve

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{\mathfrak{C}_1}{R} \cdot \frac{dI'}{dt},$$

ou encore

$$R\frac{dQ_1}{dt} = \mathfrak{C}_1\frac{dI'}{dt}.$$

Or, le facteur $\frac{dQ_1}{dt}$ représente l'intensité I_1 du courant induit dans A; si nous maintenons ce courant constant, en faisant croître le

Digitized by Google

courant inducteur suivant une certaine loi (nous allons voir qu'il suffit de le faire croître proportionnellement au temps), le premier membre de cette équation représentera la *f. e. m.* RI_1, nécessaire pour produire le courant induit, *f. e. m.* constante, puisque nous avons supposé $\frac{dQ_1}{dt}$ constant ; on a donc

$$E_1 = \mathfrak{C}_1 \frac{dI'}{dt}.$$

Si l'on veut que I_1 soit constant, il faut que E_1 le soit aussi et l'équation devient

$$\mathfrak{C}_1 dI' = E_1 dt$$

et par conséquent, en intégrant,

$$I' = \frac{E_1}{\mathfrak{C}_1} \cdot t + \text{constante},$$

c'est-à-dire que le courant inducteur devra croître proportionnellement au temps.

Nous venons de voir que la variation d'un courant dans un circuit engendre, dans un circuit voisin, une *f. e. m.* induite ; on peut déjà entrevoir que dans un même circuit parcouru par un courant variable, chaque spire engendre dans les autres, une *f. e. m.* d'induction ; c'est cette *f. e. m.* que l'on appelle la *force électromotrice de self-induction* et c'est pour éviter d'en tenir compte que nous avons supposé que l'on maintenait constante l'intensité du courant induit I_1.

496. — Définition des coefficients d'induction. — L'équation

$$E_1 = \mathfrak{C}_1 \frac{dI'}{dt}$$

montre que la *f. e. m.* d'induction est proportionnelle à la vitesse $\frac{dI'}{dt}$ de variation du courant inducteur, et nullement à l'intensité de ce courant lui-même. Résolue par rapport à $\mathfrak{C}_1$, l'équation ci-dessus donne

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{E_1}{\left(\frac{dI'}{dt}\right)}.$$

Digitized by Google

La vitesse de variation du courant inducteur étant supposée égale à l'unité, on trouve $\mathfrak{C}_1 = E_1$; d'où cette définition très simple : *Le coefficient d'induction mutuelle de deux circuits, est numériquement égal à la f. e. m. développée dans l'induit quand l'intensité du courant inducteur varie d'une unité par seconde.*

S'il s'agit de l'induction d'un circuit sur lui-même, c'est-à-dire de la *self-induction*, on peut dire que le *coefficient de self-induction* est numériquement égal à la *f. e. m.* développée dans ce circuit, lorsque l'intensité du courant qui le traverse, éprouve, dans l'unité de temps, une variation égale à l'unité.

Lorsqu'il s'agit de deux circuits, nous avons désigné par $\mathfrak{C}_1$ (491), le travail positif ou négatif développé pendant le mouvement relatif des deux circuits, lorsque leur distance mutuelle décroît depuis l'infini jusqu'à la valeur actuelle, le courant qui traverse chacun d'eux étant égal à l'unité.

Cette définition est simple et facile à comprendre, mais lorsqu'il s'agit d'un circuit unique dont on veut évaluer le coefficient de self-induction, la définition de $\mathfrak{C}_1$ est beaucoup moins claire. Elle doit être modifiée de la façon suivante :

Si l'on suppose que les différentes spires d'un circuit, soient d'abord à une très grande distance les unes des autres, et parcourues par un courant égal à l'unité, et qu'on les amène ensuite successivement dans la position qu'elles occupent réellement, le travail développé pendant cette reconstitution du circuit dans sa forme réelle, est égal au *coefficient de self-induction.*

Nous désignerons dans tout ce qui va suivre, le coefficient d'induction mutuelle par la lettre M et le coefficient de *self-induction*, par la lettre L.

Le calcul des deux coefficients d'induction, étant ramené à celui de $\mathfrak{C}_1$, peut être effectué dans quelques cas simples. Neumann a donné pour faire ce calcul, une formule générale à laquelle nous avons déjà fait allusion (452) et dont on ne se sert pas dans la pratique à cause de l'extrême difficulté des calculs analytiques qu'elle comporte dans la plupart des cas. On préfère se servir de procédés moins généraux basés sur l'emploi du symbole géométrique auquel on a

Digitized by Google

donné le nom de feuillet magnétique et permettant d'arriver beaucoup plus simplement et plus rapidement au résultat cherché. Nous donnerons plus loin quelques exemples de ces calculs.

Dans la pratique, les coefficients d'induction se déterminent au moyen de procédés expérimentaux, que nous ferons connaître dans l'électrométrie.

497. — Dimension du coefficient d'induction. — Définition du Quadrant. — Reprenons l'équation

$$E_1 = \mathfrak{C}_1 \frac{dI'}{dt},$$

et supprimons l'accent de I et l'indice de E. La dérivée $\frac{dI}{dt}$ étant du même ordre de grandeur que $\frac{I}{T}$, on peut écrire symboliquement

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{E}{\frac{I}{T}} = \frac{ET}{I}.$$

Mais on a vu (376) que I est représenté en unités absolues, par le symbole

$$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1},$$

tandis que E, comme le potentiel (377), est représenté par

$$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}.$$

En remplaçant E et I par ces symboles, on trouve que

$$\mathfrak{C}_1 = L,$$

$\mathfrak{C}_1$ est donc représenté par une longueur.

On peut le démontrer autrement ; en effet, $\mathfrak{C}_1$ étant le travail développé par unité de courant, et ce travail étant proportionnel au carré de l'unité d'intensité choisie, en vertu de la loi d'Ampère, on a symboliquement :

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{\text{Travail}}{(\text{Intensité})^2}.$$

Digitized by Google

Mais le travail est représenté par (10)

$$ML^2T^{-2},$$

tandis que le carré du courant est

$$MLT^{-2};$$

en faisant le calcul, on retrouve

$$\mathcal{C}_1 = L.$$

Pour appliquer numériquement en unités pratiques, la formule donnant la *f. e. m.* d'induction

$$E_1 = \mathcal{C}_1 \frac{dI'}{dt}$$

qui ne peut s'employer directement que lorsque E_1, $\mathcal{C}_1$, I' et t sont exprimés en unités C. G. S., il faut remplacer ces diverses quantités par leurs valeurs en unités pratiques.

En faisant cette transformation, on trouve que le travail $\mathcal{C}_1$ étant exprimé en watts-seconde pour un ampère, et $\frac{dI'}{dt}$ en ampères par seconde, E_1 est exprimé en volts. Le coefficient $\mathcal{C}_1$ est désigné alors sous le nom de *quadrant*.

Quand on dit que le coefficient d'induction mutuelle de deux bobines est de 1 quadrant, on veut dire que le courant variant dans l'une d'elles de 1 ampère par seconde, la *f.e.m.* développée dans l'autre sera égale à 1 volt.

498. — Quantité d'électricité induite développée dans deux circuits parcourus par des courants variables. — Forces électro-motrices totales. — Considérons deux circuits à proximité l'un de l'autre et parcourus par des courants engendrés par des *f. e. m. variables suivant une loi quelconque.*

Dans chaque circuit la *f. e. m.* de la source d'électricité doit être, à chaque instant, égale au produit RI de la résistance du circuit par l'intensité du courant, augmenté de la somme de toutes les *f. e. m.* d'induction.

Or, ces *f. e. m.* d'induction se réduisent, dans chaque circuit, à deux ; l'une, due à la self-induction du circuit considéré, et l'autre,

Digitized by Google

à l'induction développée par la variation du courant dans le second circuit.

Donc, dans le premier circuit, la *f. e. m.* développée par la source sera

$$E = RI + L\frac{dI}{dt} + M\frac{dI'}{dt}$$

et, dans le deuxième circuit,

$$E' = R'I' + L'\frac{dI'}{dt} + M\frac{dI}{dt}.$$

Multiplions les deux membres de ces équations par dt, il vient

$$Edt = RIdt + LdI + MdI',$$

$$E'dt = R'I'dt + L'dI' + MdI$$

et en intégrant

$$\int_0^t Edt = R\int_0^t Idt + L(I_1 - I_0) + M(I'_1 - I'_0)$$

$$\int_0^t E'dt = R\int_0^t I'dt + L'(I'_1 - I'_0) + M(I_1 - I_0);$$

les intégrales $\int_0^t Edt$ et $\int_0^t E'dt$ s'appellent *les f. e. m. totales* de chaque circuit, par analogie avec ce que l'on appelle, en mécanique, l'*impulsion totale d'une force* ; d'autre part $\int_0^t Idt$ et $\int_0^t I'dt$ sont les *quantités totales* d'électricité développées dans les deux circuits pendant le temps t ; les valeurs de ces quantités sont

$$\int_0^t Idt = \frac{1}{R}\left[\int_0^t Edt - L(I_1 - I_0) - M(I'_1 - I'_0)\right],$$

$$\int_0^t I'dt = \frac{1}{R'}\left[\int_0^t E'dt - L'(I'_1 - I'_0) - M(I_1 - I_0)\right].$$

Les quantités d'électricité Q_1, Q'_1 dues à l'induction seule, ont pour expression dans chacun des circuits, en faisant $E = 0$, $E' = 0$

$$Q_1 = -\frac{1}{R}\left[L(I_1 - I_0) + M(I'_1 - I'_0)\right],$$

$$Q'_1 = -\frac{1}{R'}\left[L'(I'_1 - I'_0) + M(I_1 - I_0)\right].$$

Pour simplifier, supposons que le premier circuit seul contienne

Digitized by Google

une source d'électricité, mais qu'il soit d'abord rompu, le second circuit étant constamment fermé ; fermons le premier circuit, le courant qui avait d'abord une valeur nulle, atteint au bout d'un temps très court l'intensité constante I_1 et pendant ce temps, provoque dans le second circuit un courant induit dont l'intensité, d'abord égale à zéro, passe par un maximum et redevient nulle lorsque le courant inducteur prend une valeur permanente. Il faut donc pour déterminer Q_1 et Q'_1 faire $I_0 = 0$, $I'_0 = 0$, $I'_1 = 0$; il vient alors

$$Q'_1 = -\frac{1}{R'} M I_1.$$

D'un autre côté, dans le circuit inducteur, la quantité d'électricité induite sera

$$Q_1 = -\frac{1}{R} L I_1 ;$$

c'est-à-dire que le premier circuit se comporte comme s'il était isolé dans l'espace, puisque Q_1 ne dépend que de la self-induction de ce circuit. Si nous rompons le circuit inducteur, les quantités d'électricité induite pendant la disparition du courant inducteur, seront numériquement égales mais de signe contraire aux précédentes.

499. — Energie développée dans les deux circuits. — Multiplions chacune des équations fondamentales, respectivement par $I dt$ et $I' dt$, on aura

$$E I dt = R I^2 dt + L I dI + M I dI',$$
$$E' I' dt = R' I'^2 dt + L' I' dI' + M I' dI ;$$

en intégrant, on a

$$\int_0^t E I dt = \int_0^t R I^2 dt + \frac{1}{2} L (I_1^2 - I_0^2) + M \int_0^t I dI',$$
$$\int_0^t E' I' dt = \int_0^t R' I'^2 dt + \frac{1}{2} L' (I_1'^2 - I_0'^2) + M \int_0^t I' dI.$$

Pour simplifier et rendre plus claire la signification de ces deux équations, nous supposerons que

$$I_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad I'_0 = 0$$

et que le deuxième circuit ne contienne pas de *f. e. m.* Alors le pre-

Digitized by Google

mier membre, $\int_0^t EI\,dt$, représente l'énergie totale dépensée pendant le temps t par la source d'électricité ; voyons maintenant la signification des trois termes du second membre ; le 1er terme

$$\int_0^t RI^2\,dt$$

représente la chaleur dégagée d'après la loi de Joule ; le 2e terme

$$\frac{1}{2} LI_1^2$$

est indépendant du temps et représente ce qu'on appelle l'énergie intrinsèque du courant.

C'est un travail dont la forme nous est inconnue et qui est emmagasiné soit dans le conducteur, soit dans le milieu ambiant (Ether) ; nous allons voir en effet qu'il est intégralement restitué au circuit lorsqu'on ramène à zéro l'intensité du courant inducteur. En effet, si le courant part de zéro pour revenir à zéro, le terme $\frac{1}{2} L(I_1^2 - I_0^2)$, devient nul, ce qui exige que pendant que le courant décroît de I_1 jusqu'à 0, le travail représenté par ce terme ait une valeur égale à $-\frac{1}{2} LI_1^2$. Il y a là une analogie complète avec ce que nous avons dit à l'occasion du travail emmagasiné lorsque deux circuits mobiles parcourus par des courants constants et situés d'abord à une très grande distance l'un de l'autre, se rapprochent jusqu'à une distance finie ; nous avons démontré alors que le travail emmagasiné dans le milieu qui environne les deux circuits, était précisément égal au travail mécanique mesurable $\int FV\,dt$ développé pendant leur rapprochement.

Le 3e terme

$$M\int_0^t I\,dI'$$

représente une forme de l'énergie que nous n'avons pas encore vu paraître.

Nous allons démontrer que, dans le cas actuel,

$$\int_0^t I\,dI' = \int_0^t I'\,dI ;$$

Digitized by Google

lorsque le courant inducteur passe d'une permanente I_0 à une seconde valeur permanente I_1. En effet, cherchons à déterminer la forme de la courbe qui représente I' en fonction de I, en supposant que le courant inducteur parte de 0, pour atteindre une valeur constante I_1 ; le courant induit I' part alors de 0, passe par un maximum et redevient nul lorsque I_1 reste constant.

On obtient ainsi la courbe représentée approximativement par la figure 266 ; nous disons approximativement parce que, comme nous le verrons, le courant inducteur n'atteint théoriquement sa valeur permanente qu'au bout d'un temps infini ; il en est de même du courant induit ; mais, au contraire, en pratique on peut considérer ces deux courants comme différant extrêmement peu de leur valeur

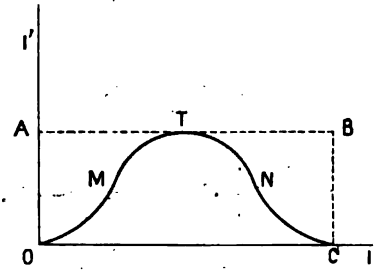

Fig. 266

limite au bout d'un temps très court ; il y a là une analogie complète avec la décharge d'un condensateur en fonction du temps (308).

$\int I dI'$ représente la surface OATNCO diminuée de la surface OATMO, c'est-à-dire la surface OMTNCO ; d'un autre côté, l'intégrale $\int I' dI$ est aussi égale à la surface OMTNCO ; on a donc

$$\int I dI' = \int I' dI.$$

On en conclut qu'il y a eu transmission d'énergie, *sans perte*, du circuit inducteur au circuit induit à travers l'espace, ce qui est un argument considérable de plus en faveur de l'existence d'un milieu ambiant intermédiaire capable de transmettre intégralement cette énergie.

Digitized by Google

§ 2. — ÉNERGIE INTRINSÈQUE DES COURANTS.

500. — Énergie intrinsèque d'un courant fermé. — Nous avons déjà parlé de l'analogie qui existe entre les feuillets magnétiques et les circuits fermés parcourus par des courants (416 à 420); nous allons l'utiliser en recherchant l'énergie intrinsèque d'un courant.

Nous avons vu (238) que l'énergie intrinsèque d'un feuillet magnétique d'épaisseur λ, est le travail mécanique nécessaire pour écarter les deux faces du feuillet depuis le contact jusqu'à la distance λ; si on désigne par C la capacité magnétique du feuillet (239), par V son potentiel magnétique, on aura pour l'expression de ce travail

$$W = \frac{1}{2} CV^2,$$

ou encore

$$W = \frac{1}{2} \frac{S}{4\pi\lambda} 16\pi^2\Phi^2 = 2\pi \frac{S}{\lambda} \Phi^2.$$

Mais, si on remplace le feuillet magnétique par un circuit parcouru

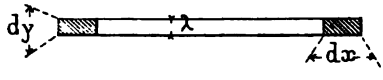

Fig. 267

par un courant I, dont le conducteur aurait pour section un rectangle de base dx et de hauteur dy (fig. 267); on aura

$$\Phi = I = i.dx.dy$$

i étant la densité du courant.

Posons

$$\lambda = dy,$$

d'après l'équation qui donne I, on a

$$(idx)^2 = \frac{I^2}{dy^2}.$$

Digitized by Google

W devient donc

$$2\pi S dy \left(\frac{I}{dy}\right)^2.$$

Si on désigne par I_1 le courant par unité de hauteur

$$I_1 = \frac{I}{dy}$$

et par n_1 le nombre de spires par unité de hauteur, on a

$$I_1 = n_1 I$$

par conséquent

$$W = 2\pi S dy (n_1 I)^2$$

et pour une hauteur de la bobine égale à y

$$W = 2\pi S y n_1^2 I^2;$$

telle est l'expression de l'énergie nécessaire pour établir un courant d'intensité I dans un circuit fermé ayant la forme d'une bobine de hauteur y et sur laquelle est enroulée une couche de fil d'épaisseur négligeable.

501. — On peut arriver au même résultat en considérant le flux de force total à l'intérieur d'un feuillet magnétique (240) et en appliquant la formule du travail $\int I d\mathcal{F}$ produit par la variation du flux de force embrassé par un courant d'intensité I. Le flux total à l'intérieur d'un feuillet magnétique a pour expression

$$4\pi\Phi \frac{S}{\lambda}.$$

Si le feuillet est remplacé par un courant de même contour, on a

$$\mathcal{F} = 4\pi I \frac{S}{\lambda}.$$

Pour une variation de flux $d\mathcal{F}$, on aura

$$d\mathcal{F} = \frac{4\pi S}{\lambda} dI$$

et en intégrant

$$\int I d\mathcal{F} = \frac{2\pi S}{\lambda} I^2,$$

Digitized by Google

Mais $Id\mathcal{F}$ est le travail mécanique produit lorsque le flux de force embrassé par le courant I éprouve une variation $d\mathcal{F}$. On arrive donc bien à la même formule que plus haut

$$2\pi \frac{S}{\lambda} \Phi^2$$

et en effectuant les mêmes calculs, on arriverait nécessairement à la même valeur finale pour W.

502. — Enfin nous pouvons arriver d'une troisième façon, au même résultat, en appliquant les lois des courants induits.

En effet, la *f. e. m.* développée dans un circuit fermé pendant l'établissement du courant, a pour expression la variation du flux de force qui émane du circuit lui-même

$$E_1 = \frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

Mais, en supposant que ce courant soit engendré par une pile de force électro-motrice E_0, on aura

$$E_0 = E_1 + RI.$$

Assimilant maintenant le circuit à un feuillet magnétique, il viendra

$$\mathcal{F} = 4\pi\Phi \frac{S}{\lambda} = 4\pi I \frac{S}{\lambda},$$

$$d\mathcal{F} = 4\pi \frac{S}{\lambda} dI,$$

donc, en remplaçant E_1 par sa valeur dans l'équation de E_0, on aura

$$E_0 = 4\pi \frac{S}{\lambda} \frac{dI}{dt} + RI,$$

En multipliant les deux membres par Idt

$$E_0 I dt = 4\pi \frac{S}{\lambda} I dI + RI^2 dt$$

et en intégrant

$$\int E_0 I dt = 2\pi \frac{S}{\lambda} I^2 + \int RI^2 dt.$$

Or, $\int E_0 I dt$ est le travail total fourni par la pile pendant le temps t;

Digitized by Google

$\int RI^2 dt$ est la chaleur développée dans le circuit en vertu de la loi de Joule.

En vertu du principe de la conservation de l'énergie, l'expression

$$2\pi \frac{S}{\lambda} I^2$$

représente donc le travail que nous avons désigné plus haut par le symbole $\frac{1}{2} LI^2$ (499) et nous permet par conséquent de déterminer la valeur de L. Il vient en effet, en identifiant les deux expressions

$$L = \frac{4\pi S}{\lambda}$$

ou, en appliquant l'équation finale du n° 500,

$$L = 4\pi S y n_1^2$$

dans laquelle S représente la surface embrassée par la *spire moyenne*, y la hauteur de la bobine et n_1 le nombre de spires contenues dans l'unité de longueur de la bobine.

§ 3. — CALCUL DE LA VALEUR DES COEFFICIENTS D'INDUCTION DANS PLUSIEURS CAS USUELS.

503. — Influence de la grandeur et du nombre de spires d'un système électro-magnétique sur la valeur des coefficients d'induction. — Etant données deux bobines A et A′, supposons que l'on multiplie toutes leurs dimensions ainsi que le diamètre du fil enroulé sur elles, par le nombre k, en ayant soin de multiplier également par k la distance de leurs centres de figures. Désignons par M_1 le coefficient d'induction mutuelle des deux bobines et par M_k le coefficient d'induction des bobines amplifiées. Le coefficient d'induction mutuelle étant précisément égal au travail $\mathfrak{T}_1$ développé lorsque les deux bobines, traversées par l'unité de courant, se rapprochent de l'infini jusqu'à leur distance actuelle, il nous suffira de savoir comment varie $\mathfrak{T}_1$ en fonction des dimensions et des distances finales des deux bobines, pour résoudre la question proposée.

Digitized by Google

Or, nous avons vu (450) que le travail développé pendant le déplacement relatif des deux bobines d'un système électro-dynamique, est proportionnel à la cinquième puissance des dimensions des deux bobines, à la condition que ces dimensions linéaires ainsi que les distances initiale et finale des bobines, soient multipliées par le même nombre et que la *densité du courant* qui les traverse reste constante.

Voyons maintenant quelle est l'influence du nombre de spires, les dimensions du système restant constantes. Supposons que l'on coupe chaque bobine par un plan diamétral (fig. 268) et que l'on représente par la partie couverte de hachures l'épaisseur l du fil enroulé ; divisons cette partie hachurée en carrés de 1^{cm} de côté et désignons par n_1 et n'_1 *le nombre de fils contenus dans* 1^{cm2} *de la section* de chacune des bobines du système ; et par I et I' les intensités des

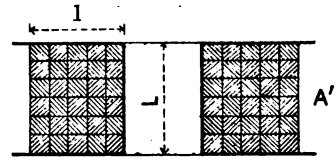

Fig. 268

courants qui les traversent. Les densités respectives des deux courants pourront être représentées par les produits $n_1 I$, $n'_1 I'$, puisque nous appelons densité de courant l'intensité totale du courant qui passe dans l'unité de section.

Le travail produit par le déplacement relatif des deux bobines, étant proportionnel au produit ii' des densités de courant dans chacune d'elles, est donc proportionnel au produit $n_1 I n'_1 I'$ et le travail $\mathfrak{T}_1$ correspondant à $I = 1 \quad I' = 1$, sera proportionnel à $n_1 n'_1$.

Ainsi, en résumé, le travail $\mathfrak{T}_1$ est proportionnel ; d'une part à la 5^{me} puissance des dimensions homologues des deux systèmes que l'on compare entre eux et d'autre part au produit $n_1 n'_1$.

Il est donc en définitive proportionnel au produit $n_1 n'_1 k^5$, k représentant le rapport des dimensions homologues des deux systèmes.

Il en est donc de même des deux coefficients d'induction M et L.

Digitized by Google

Nous allons montrer comment on peut, dans plusieurs cas simples, trouver à l'aide du calcul, la valeur des coefficients d'induction de systèmes électro-magnétiques qui ne contiennent pas de fer.

504. — Induction mutuelle de deux bobines concentriques de très grande longueur par rapport à leur diamètre. — La bobine inductrice, contenant un nombre de spires n_1 *par unité de longueur*, et étant parcourue par un courant I, donne naissance à un champ magnétique intérieur égal à $4\pi n_1 I$ (403)[1]. Le flux total de force qui en résulte à l'intérieur de la bobine, est égal à $S\mathcal{H}$, S désignant la surface embrassée par la spire moyenne ; on a donc, en le désignant par $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = 4\pi n_1 IS.$$

D'autre part, la *f. e. m.* développée dans une spire de la bobine induite, supposée concentrique à la bobine inductrice et de même longueur qu'elle, a pour expression

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = 4\pi n_1 S \frac{dI}{dt}.$$

Si on désigne par l la longueur commune aux deux bobines, et par n'_1 le nombre de spires contenues *dans l'unité de longueur* de la bobine induite, le nombre total des spires qu'elle contient, a évidemment pour valeur $n_1 l$. Chacune des spires induites étant le siège de la même *f. e. m.*, on a, pour la valeur de la *f. e. m.* totale E_1,

$$E_1 = 4\pi n_1 n'_1 l S \frac{dI}{dt}.$$

Mais, le coefficient d'induction mutuelle M étant égal au quotient

$$\frac{E_1}{\frac{dI}{dt}},$$

on a, dans le cas de deux bobines concentriques,

$$M = 4\pi n_1 n'_1 l S.$$

(1) On a, en effet (403, p. 545), en désignant par F l'effort exercé par le solénoïde de longueur indéfinie sur une masse magnétique μ placée dans son intérieur, $F = 4\pi n_1 I\mu$. Si on fait $\mu = 1$, F devient ce qu'on appelle l'intensité du champ magnétique.

Digitized by Google

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — Supposons que l'on ait

$$n_1 = 100, \qquad n'_1 = 100, \qquad l = 20^{cm}, \qquad S = 50^{cm^2}.$$

Ces dimensions correspondent à deux bobines concentriques ayant un diamètre moyen d'environ 8 c. m. et dont les fils auraient chacun un peu moins de 1^{mm} de diamètre, la couche de fil ayant sur chacune d'elles une épaisseur d'environ 1 c. m.

On trouve en appliquant la formule,

$$M = 4 \times 3{,}14 \times 100 \times 100 \times 20 \times 50 = 125\,600000.$$

Ce nombre étant exprimé en unités C. G. S., doit être divisé par 10^9 pour être exprimé en quadrants ; il en résulte

$$M = 0{,}1256 \text{ quadrant.}$$

Cela signifie que si l'intensité du courant inducteur augmentait ou diminuait régulièrement d'un ampère dans une seconde, la $f.e.m.$ développée dans l'induit aurait une valeur négative ou positive égale à 0,1256 volt.

Si on voulait calculer le coefficient de self-induction L, de la bobine inductrice, on serait conduit à trouver le même nombre que pour le coefficient d'induction mutuelle des deux bobines parce que le flux de force total aurait la même valeur dans les deux cas ainsi que le nombre de spires par unité de longueur.

505. — Induction mutuelle de deux bobines très éloignées. — Nous supposerons que les deux bobines ont des dimensions très petites par rapport à la distance qui les sépare et que leurs axes sont situés sur une même droite et que, par conséquent, toutes les spires sont dans des plans parallèles. Si on désigne par s la surface embrassée par une des spires de la bobine inductrice ; N *le nombre total des spires* ; I l'intensité du courant qui les traverse ; s' et N' les éléments correspondants de la bobine induite et par a la distance des centres de figure des deux bobines, le flux de force magnétique qui traverse une seule des spires de la seconde bobine, a pour expression le produit de l'intensité du champ magnétique de la première bobine par la surface s'. Or, nous avons vu (372) que l'intensité du champ magnétique produite par une seule des spires de la première bobine, en un point situé sur l'axe de cette bobine à une distance a du centre de la spire, a pour valeur

$$\frac{2Is}{a^3}.$$

Digitized by Google

Le flux de force qui traverse une des spires de la seconde bobine, est donc égal à

$$f = \frac{2ls}{a^3} s'.$$

La première bobine contenant N spires, le flux de force embrassé par une des spires de la seconde, sera N fois aussi grand, et enfin chacune des spires de la seconde bobine donnant lieu à la même force électro-motrice, on voit que la *f. e. m.* totale induite dans la seconde bobine, sera NN′ fois aussi grande que si chacune des bobines ne contenait qu'une spire. Or, dans ce dernier cas, la *f. e. m.* aurait pour expression

$$\frac{df}{dt} = \frac{2ss'}{a^3} \frac{dl}{dt}.$$

La *f. e. m.* totale sera donc donnée par l'équation

$$E_1 = \frac{2NN'ss'}{a^3} \frac{dl}{dt}.$$

Le coefficient d'induction mutuelle M a donc pour valeur

$$M = \frac{2NN'ss'}{a^3}.$$

On voit qu'il est en raison inverse du cube de la distance des deux bobines.

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — Supposons deux bobines identiques placées à une distance de 100 mètres l'une de l'autre (1) et que leur diamètre moyen est de 2 mètres ; on aura

$$s = s' = 31\,416 \text{ centimètres carrés.}$$

Enfin, en enroulant sur ces bobines un fil de $0^{mm},5$ de diamètre isolant compris, il est facile de placer sur chacune d'elles 40000 spires ; savoir 400 spires dans le sens de l'axe et 100 couches de fil dans le sens du rayon, la formule donne alors, en exprimant tout en centimètres

$$M = \frac{2 \times \overline{40.000}^2 \times \overline{31.416}^2}{\overline{10000}^3} = 3\,158\,300 \text{ C. G. S.}$$

(1) Nous choisissons une distance de 100 mètres, pour montrer que l'induction peut produire des effets appréciables à de très grandes distances.

Digitized by Google

ce qui correspond à

$$\frac{3.158.300}{10^9} \text{ quadrant.}$$

Il résulte de là qu'une variation d'intensité de 1 ampère par seconde dans la première bobine, ferait naître dans la seconde bobine une *f. e. m.* induite égale à environ $\frac{1}{316}$ de volt ; ou encore qu'une variation d'intensité de 316 ampères par seconde, déterminerait dans la seconde bobine, la production d'une *f. e. m.* de 1 volt.

506. — **Coefficient d'induction de deux circuits distincts enroulés sur le même tore.** — Nous supposerons que le tore est engendré par la rotation d'un cercle de rayon r dont le centre est situé à une distance R de l'axe de rotation. Si on désigne par N *le nombre total des spires* inductrices régulièrement enroulées sur la surface du tore, et par I l'intensité du courant qui les traverse, le flux total de force embrassé par chaque spire, a pour expression (428)

$$\mathcal{F} = 2\text{NI}[\text{R} - \sqrt{\text{R}^2 - r^2}].$$

On en conclut

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = 2\text{N}[\text{R} - \sqrt{\text{R}^2 - r^2}]\frac{d\text{I}}{dt}.$$

C'est la valeur de la *f. e. m.* développée dans une seule spire de l'induit et comme l'induit contient N′ spires, la *f. e. m.* totale aura pour expression

$$\text{E}_1 = 2\text{NN}'[\text{R} - \sqrt{\text{R}^2 - r^2}]\frac{d\text{I}}{dt},$$

et par suite

$$\text{M} = 2\text{NN}'[\text{R} - \sqrt{\text{R}^2 - r^2}].$$

On trouverait facilement que le coefficient de self-induction du circuit primaire aurait pour expression

$$\text{L} = 2\text{N}^2[\text{R} - \sqrt{\text{R}^2 - r^2}].$$

L'enroulement des deux circuits sur un tore, présente cette propriété remarquable que la *f. e. m.* d'induction a rigoureusement la valeur donnée par la formule ci-dessus, tandis que les expressions qui conviennent aux cas précédents, ne sont qu'approximatives, parce

Digitized by Google

que le champ magnétique, dans les bobines rectilignes, n'est pas uniforme près des bords de la bobine, comme il est facile de s'en assurer par le calcul. En outre, si on considère une seule des spires de l'induit du tore, on trouve que la *f. e. m.* développée dans cette spire, est indépendante de sa forme et de sa grandeur; ainsi elle pourrait avoir la forme d'un cercle d'un diamètre beaucoup plus grand que celui du tore lui-même sans que la *f. e. m.* fût altérée; la seule condition à remplir étant que la spire et le tore se traversent mutuellement comme deux bagues de diamètres différents entrelacées. Enfin, fait bien remarquable, lorsque la spire induite est ainsi notablement plus grande que les spires inductrices, la valeur du champ magnétique des régions de l'espace dans lequel elle se trouve, est constamment nulle, puisque un solénoïde enroulé sur un tore n'exerce aucune action mécanique sur une masse magnétique extérieure (428). Ce fait n'est nullement en contradiction avec le théorème du flux de force coupé, comme on pourrait le croire au premier abord; il est au contraire une confirmation du principe de l'indépendance des actions inductrices simultanées de plusieurs systèmes électro-magnétiques. Il y a là une analogie frappante avec les phénomènes que nous avons étudiés en parlant des écrans magnétiques (479). Nous avons vu, en effet, que le champ magnétique est constamment nul à l'intérieur d'un tube de fer lorsque ce dernier a des parois suffisamment épaisses et que cela n'empêche nullement un conducteur contenu dans ce tube de fer d'être soumis aux actions mécaniques et aux *f. e. m.* d'induction produites par les masses magnétiques extérieures.

507. — Définition de la spire moyenne d'une bobine. — Dans les calculs qui précèdent, nous avons supposé que l'épaisseur de la couche de fil enroulé sur les bobines inductrices et induites, étaient très faibles dans le sens du rayon et nous avons admis qu'elles avaient toutes un rayon égal à celui d'une spire à laquelle nous avons donné le nom de *spire moyenne*. Il importe de donner une définition exacte de ce que nous entendons par là. Nous appelons spire moyenne, celle qui embrasse une surface telle qu'en la

Digitized by Google

multipliant par le nombre des spires, on obtient un produit égal à la somme des surfaces embrassées par toutes les spires. On démontre facilement que le rayon de la spire moyenne ainsi définie a pour expression

$$r_m = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{r_n^3 - r_1^3}{r_n - r_1}} = \sqrt{\frac{1}{3}r_n^2 + r_n r_1 + r^2};$$

r_n et r_1 désignent respectivement les rayons de la plus grande et de la plus petite spire. Lorsque ces rayons sont peu différents, le rayon de la spire moyenne diffère très peu de leur moyenne arithmétique.

§ 4. — ÉTUDE DE L'ÉTAT VARIABLE DES COURANTS.

508. — Equations donnant, en fonction du temps, les intensités des courants qui traversent deux circuits doués d'induction mutuelle. — Nous avons trouvé pour les valeurs des *f. e. m.* totales dans chacun des circuits :

$$E = RI + L\frac{dI}{dt} + M\frac{dI'}{dt}.$$

et

$$E' = R'I' + L'\frac{dI'}{dt} + M\frac{dI}{dt}.$$

En différentiant par rapport au temps chacune de ces équations, on obtient deux nouvelles équations qui jointes aux deux précédentes, forment quatre équations. Si entre ces quatre équations, on élimine I', $\frac{dI'}{dt}$, $\frac{d^2I'}{dt^2}$, on obtiendra une équation unique ne contenant plus que I, $\frac{dI}{dt}$, $\frac{d^2I}{dt^2}$, ainsi que les constantes E, E', R, R'. Par de simples considérations de symétrie, cette équation permet d'écrire immédiatement l'équation analogue qui contient I' et ses dérivées $\frac{dI'}{dt}$, $\frac{d^2I'}{dt^2}$.

Les intégrales générales de ces équations simultanées sont de la forme

Digitized by Google

$$RI - E = Ae^{at} + Be^{a't},$$

$$R'I' - E' = A'e^{at} + B'e^{a't},$$

A, B, A', B' étant des constantes que l'on détermine en se donnant les valeurs de I, I', $\frac{dI}{dt}$, $\frac{dI'}{dt}$ pour $t = 0$. Dans ces équations a et a' représentent les racines de l'équation du 2e degré

$$\left(1 - \frac{M^2}{LL'}\right)a^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{R'}{L'}\right)a + \frac{RR'}{LL'} = 0,$$

dont les racines sont toujours réelles et négatives.

509. — Dans le cas où l'un des circuits ne contient pas de source d'électricité, comme cela a lieu dans les bobines d'induction, il est facile de trouver la valeur des courants à chaque instant ; en effet, si on pose

$$C = \sqrt{\left(\frac{RL' - R'L}{2RM}\right)^2 + \frac{R'}{R}},$$

on trouve

$$I = \frac{E}{R}\left[1 - \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{R'L - RL'}{2RMC}\right)e^{-at} + \left(1 - \frac{R'L - RL'}{2RMC}\right)e^{-a't}\right]\right],$$

$$I' = -\frac{E}{2R'C}(e^{-at} - e^{-a't}).$$

On a d'ailleurs

$$a = \frac{RL' + R'L - 2RMC}{2(M^2 - LL')},$$

$$a' = \frac{RL' + R'L + 2RMC}{2(M^2 - LL')}.$$

510. — Dans le cas particulier où les circuits sont identiques, les formules se simplifient et deviennent

$$I = \frac{E}{R}\left[1 - \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{Rt}{L+M}} + e^{-\frac{Rt}{L-M}}\right)\right],$$

$$I' = -\frac{E}{2R'}\left[e^{-\frac{Rt}{L+M}} - e^{\frac{Rt}{L-M}}\right].$$

Digitized by Google

En discutant ces formules, il est facile de voir que le courant inducteur n'atteint jamais théoriquement une valeur permanente ; dans la pratique, on considère ce résultat atteint au bout de quelques dix-millièmes de seconde à moins que L et M ne soient très grands.

511. — Application au cas particulier de la Self-Induction. — On peut traiter le cas particulier de la self-induction en se servant des formules générales que nous venons de trouver ; en effet, dans ce cas, ces formules se simplifient puisqu'on n'a plus affaire qu'à un seul circuit ; on a alors $M = 0$, $L' = 0$ et par suite

$$E = RI + L\frac{dI}{dt}$$

d'où

$$I = \frac{E - L\dfrac{dI}{dt}}{R}$$

dont l'intégrale générale est

$$I = \frac{E}{R} + \frac{A}{e^{\frac{Rt}{L}}}.$$

Si on fait $t = 0$ et $I = I_0$, A devient alors égal à

$$I_0 - \frac{E}{R}$$

et pour $t = \infty$, on a

$$I = \frac{E}{R}.$$

A un instant quelconque t, la valeur du courant sera

$$I = \frac{E}{R} - \left[\frac{E}{R} - I_0\right] e^{-\frac{Rt}{L}}$$

équation que l'on peut mettre sous la forme

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) + I_0 e^{-\frac{Rt}{L}};$$

c'est l'intensité du courant qui traverse à un instant t un circuit contenant une self-induction mais n'ayant pas de capacité.

Digitized by Google

512. — Durée de l'état variable nécessaire pour amener le courant à une valeur donnée de sa valeur permanente. — Nous venons de voir que la durée de l'état variable pour amener le courant à l'état permanent est théoriquement infinie ; pour que ces équations aient une signification pratique, il est donc nécessaire de chercher le temps que ce courant mettra pour atteindre une fraction donnée de sa valeur permanente.

Soit k la valeur donnée de la fraction du courant permanent que l'on veut atteindre ; cherchons le temps t en fonction de k ; servons-nous pour cela, de la formule précédemment trouvée dans laquelle nous ferons $I_0 = 0$

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right),$$

$\frac{E}{R}$ étant l'intensité finale, nous devons avoir

$$k = 1 - e^{-\frac{Rt}{L}}$$

équation qui nous donne pour la valeur de t

$$t = \frac{L}{R}\log_e \frac{1}{1-k}.$$

513. — Exemple numérique. — Cherchons le temps nécessaire pour que le courant qui traverserait une bobine d'une résistance de 1 ohm et dont la self-induction serait égale à 1 quadrant, atteigne les 0,999 de la valeur permanente de ce courant.

En faisant dans la formule $L = 1$ quadrant,

$R = 1$ ohm,

$k = 0{,}999$,

on trouve

$$t = \frac{1}{1} \times \log_e \frac{1}{1-0{,}999} = 6{,}9.$$

Le temps nécessaire pour qu'un courant atteigne dans un semblable circuit, les 0,999 de sa valeur permanente, est donc de 6 secondes, 9.

514. — Calcul des extra-courants. — On a vu que le courant

Digitized by Google

dans un circuit doué de self-induction était donné par la formule générale

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) = \frac{E}{R} - e^{-\frac{Rt}{L}}\frac{E}{R}.$$

Le terme $\frac{E}{R}e^{-\frac{Rt}{L}}$ est ce qu'on appelle l'*extra-courant*, nous le désignerons par I_1.

La quantité d'électricité qu'il met en mouvement a pour expression

$$Q_1 = \int_0^\infty I_1 dt = \frac{E}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{Rt}{L}} dt,$$

$$Q_1 = \frac{EL}{R^2} = \frac{LI}{R}.$$

Résultat que nous avons déjà trouvé par une autre méthode.

515. — Calcul de l'extra-courant dans un circuit à résistance variable. — Considérons un circuit APB (fig. 269) contenant une pile P et deux barres de connexions sans résistance A

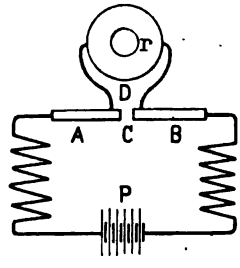

Fig. 269

et B que l'on peut mettre en contact ou écarter en C. Un circuit à self-induction D, de résistance r, est dérivé entre A et B; A et B étant mis en contact au point C, aucun courant appréciable ne passe dans D, mais si l'on vient à écarter A et B, on introduit brusquement la résistance r dans le circuit.

Digitized by Google

Avant la séparation de A et de B, le courant permanent était

$$I_0 = \frac{E}{R},$$

R étant la résistance du circuit APB ; après la séparation, le courant permanent final sera

$$\frac{E}{R+r}$$

à un instant t, l'intensité de ce courant sera, en appliquant les formules démontrées plus haut (511)

$$\frac{E}{R+r}\left(1+\frac{r}{R}e^{-\frac{(R+r)t}{L}}\right)$$

et la quantité d'électricité mise en mouvement par *l'extra-courant seul*, sera

$$\frac{Er}{R(R+r)}\int_0^\infty e^{-\frac{(R+r)t}{L}}dt = \frac{ELr}{(R+r)^2R}.$$

Si on rapproche alors les deux barres A et B, tout courant appréciable cesse dans r ; la $f.e.m.$ devient nulle dans ce circuit ; on a donc à chaque instant

$$rI + L\frac{dI}{dt} = 0$$

et à un instant quelconque, la valeur du courant sera

$$I = \frac{E}{R+r}e^{-\frac{rt}{L}};$$

la quantité d'électricité mise en mouvement sera

$$\int_0^\infty I dt = -\frac{L}{R}\frac{E}{R+r};$$

quant à la quantité d'énergie, elle est égale à

$$\frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R+r}\right)^2.$$

Digitized by Google

516. — On peut mettre en évidence ces phénomènes d'extra-courant, en employant la disposition suivante (fig. 270).

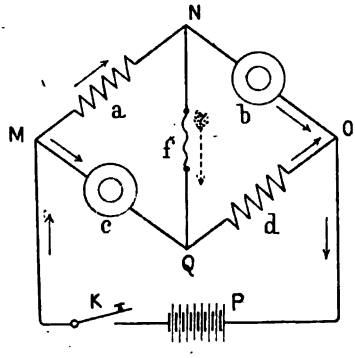

Fig. 270

On forme un pont de Weasthone dont deux des branches sont composées de bobines *b* et *c* douées de self-induction et les deux autres, de résistances *a* et *d* sans self-induction, telle que l'on ait

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

a, *b*, *c* et *d* étant les résistances ohmiques des quatre bobines. Lorsque le courant de la pile P est fermé depuis un certain temps, il ne passe aucun courant dans la diagonale NQ du pont ; mais au moment où l'on interrompt le courant à l'aide de la clef K, on constate le passage de l'extra-courant des deux bobines *a* et *b* dans la diagonale NQ, soit en faisant rougir et même fondre un fil *f*, soit de toute autre façon. On constate le même phénomène au moment de la fermeture du courant.

517. — **Décharge oscillante d'un condensateur.** — Nous allons étudier la décharge d'un condensateur à travers un circuit doué de self-induction et nous allons voir, que cette décharge peut être représentée par une courbe de forme continue ou ondulatoire.

Considérons un circuit (fig. 271) formé par une pile P, un condensateur C et une bobine L douée de self-induction.

Soient E la *f.e.m.* de la pile supposée constante et ε la *d.d.p.*

Digitized by Google

entre les armatures du condensateur de capacité C ; R la résistance du circuit ABDF, non compris, naturellement, le condensateur ; L le coefficient de self-induction de la bobine L.

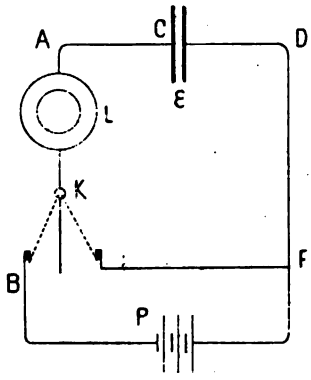

Fig. 271

Une clef K permet, soit de charger le condensateur, soit de le décharger.

Pendant la charge du condensateur, on aura, à chaque instant,

$$E = \varepsilon + RI + L\frac{dI}{dt};$$

mais, en vertu des propriétés des condensateurs la quantité Q d'électricité répartie sur chaque armature, est donnée par l'équation

$$Q = C\varepsilon,$$

et comme la quantité Q est obligée de traverser le circuit CABPFD, l'intensité du courant a pour valeur

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}.$$

On obtient donc, après remplacement, pour la valeur de E,

$$E = \frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2Q}{dt^2},$$

ou

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{CL}Q - \frac{E}{L} = 0.$$

Telle est l'équation différentielle du second ordre qui régit les

Digitized by Google

phénomènes de la charge du condensateur dans les conditions de l'expérience. Ces phénomènes ne présentant pas pour nous d'intérêt et donnant lieu d'autre part à des calculs compliqués, nous étudierons seulement la décharge à travers le circuit CAKFD.

Pour cela, faisons dans l'équation que nous venons de trouver

$$E = 0.$$

Il vient alors

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{CL}Q = 0.$$

Pour intégrer cette équation, posons

$$Q = e^{at};$$

en remplaçant et en développant, on obtient

$$e^{at}\left(a^2 + \frac{R}{L}a + \frac{1}{CL}\right) = 0.$$

Donc l'intégrale générale est de la forme

$$Q = Ae^{a't} + A'e^{a''t};$$

A et A′ étant des constantes que l'on déterminera par les conditions aux limites; a' et a'' les racines de l'équation

$$a^2 + \frac{R}{L}a + \frac{1}{CL} = 0,$$

qui sont :

$$a' = \frac{-CR + \sqrt{C^2R^2 - 4CL}}{2CL},$$

$$a'' = \frac{-CR - \sqrt{C^2R^2 - 4CL}}{2CL}.$$

Deux cas peuvent se présenter suivant que ces racines sont réelles ou imaginaires; examinons successivement ces deux cas.

1° Supposons d'abord qu'elles soient réelles ; on aura

$$CR^2 - 4L > 0.$$

En déterminant les constantes A et A′ par la condition que l'on ait

$$t = 0, \qquad Q = Q_0 \qquad \text{et} \qquad I = 0.$$

En désignant par c l'expression

$$\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}},$$

Digitized by Google

on trouve

$$Q = Q_0 e^{-\frac{Rt}{2L}}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{R}{4cL}\right)e^{ct}+\left(\frac{1}{2}-\frac{R}{4cL}\right)e^{-ct}\right]$$

et

$$I = \frac{Q_0}{2cCL}e^{-\frac{Rt}{2L}}(e^{ct}-e^{-ct}).$$

En discutant cette équation, on trouve que lorsque t varie depuis 0 jusqu'à l'infini, l'intensité du courant de décharge, d'abord nulle, s'élève jusqu'à une valeur maxima pour décroître ensuite rapidement, mais pour n'atteindre sa valeur nulle qu'au bout d'un temps infini ; c'est ce que montre la courbe représentative de ce phénomène (fig. 272), obtenue en portant en abscisses les temps et en ordonnées les intensités correspondantes.

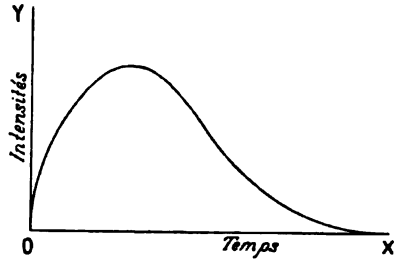

Fig. 272

2° Supposons maintenant les racines imaginaires ; on a

$$CR^2 - 4L < 0.$$

Remplaçons la valeur de c, dans ce cas, par

$$c = \sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}},$$

les fonctions exponentielles se transforment alors en fonctions circulaires et l'on a, en employant la formule d'Euler,

$$Q = Q_0 e^{-\frac{Rt}{2L}}\left(\cos ct + \frac{R}{2cL}\sin ct\right),$$

Digitized by Google

le courant est alors représenté par l'équation

$$I = \frac{Q_0}{cCL} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin ct.$$

Cette équation nous montre que dans ce cas, le courant est périodique ; quand ct varie de 0 jusqu'à 2π, le courant parcourt une période complète et tous les phénomènes recommencent de la même manière depuis $ct = 2\pi$ jusqu'à $ct = 4\pi$, la période T étant égale à

$$\frac{2\pi}{c},$$

ou, en remplaçant c par sa valeur,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Il faut remarquer toutefois que chaque période diffère de la précédente par une intensité maxima plus petite.

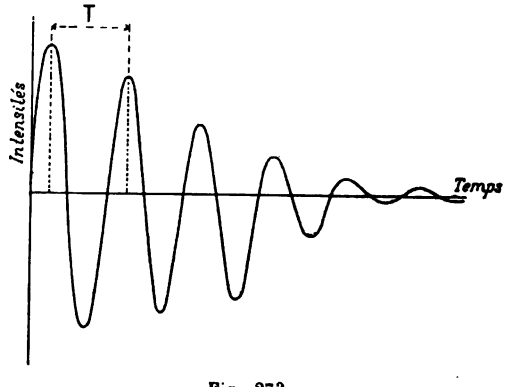

Fig. 273

La figure 273 représente la courbe obtenue dans ce cas.

En faisant varier convenablement les valeurs de C, de L et de R, on arrive à des périodes ayant une durée extrêmement petite ; on peut par ce procédé obtenir au moment de la décharge une série d'étincelles électriques qui semble n'en former qu'une seule tant est

Digitized by Google

grande la rapidité avec laquelle elles se succèdent ; on est obligé pour constater que ces étincelles sont bien séparées l'une de l'autre d'avoir recours à l'artifice du miroir tournant imaginé par Wheatstone.

C'est en se basant sur ces phénomènes que Hertz et Tesla ont pu produire dans un circuit, des oscillations électro-magnétiques extrêmement rapides. Si, en effet, on lance dans le fil primaire d'une bobine d'induction, ces courants de forme oscillatoire, le fil secondaire sera parcouru par des courants induits dont la *f. e. m.* est égale à $M\frac{dI}{dt}$; or, $\frac{dI}{dt}$ est alors extrêmement grand et il l'est d'autant plus que le nombre d'oscillations est lui-même plus considérable. On pourra donc par ce procédé obtenir des effets d'induction très énergiques même dans des circuits placés à des distances relativement grandes du circuit inducteur.

518. — Cas où le condensateur est en dérivation sur un circuit doué de self-induction. — Moyen d'annuler l'effet de la self-induction par un condensateur. — Soit un circuit AF (fig. 274) contenant en B une bobine douée de self-induction et en r' une résistance sans self-induction sur laquelle est dérivé un

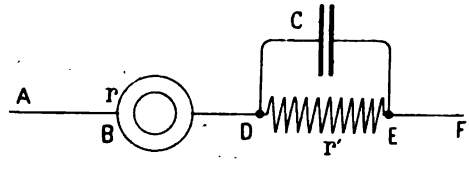

Fig. 274

condensateur C. Si on désigne par r la résistance du circuit AD ; par ε la *d. d. p.* entre les deux points A et D ; par ε' la *d. d. p.* entre D et E ; par C la capacité du condensateur et par L le coefficient de self-induction de la bobine B ; on aura à chaque instant dans le circuit AD

$$\varepsilon = rI + L\frac{dI}{dt},$$

Digitized by Google

dans le circuit DE

$$\varepsilon' = r'I',$$

d'où l'on déduit

$$\int I dt = \frac{\int \varepsilon dt - L(I_0 - I_1)}{r},$$

$$\int I' dt = \frac{\int \varepsilon' dt}{r'},$$

I_0 et I_1 étant deux valeurs correspondant à deux états permanents de I. En désignant par ΔI la variation

$$I_0 - I_1$$

et par E et E' les valeurs des intégrales définies

$$\int_{I_0}^{I_1} \varepsilon dt, \qquad \int_{I_0}^{I_1} \varepsilon' dt,$$

ces deux équations peuvent s'écrire, en posant

$$\int_{I_0}^{I_1} I dt = q, \qquad \int_{I_0}^{I_1} I' dt = q',$$

$$q = \frac{E - L\Delta I}{r},$$

$$q' = \frac{E'}{r'};$$

mais, le condensateur est, à chaque instant, chargé d'une quantité d'électricité égale à $C\varepsilon'$; si ε' passe de la valeur ε'_0 à ε'_1, la charge du condensateur variera de

$$C(\varepsilon'_0 - \varepsilon'_1)$$

et comme

$$\varepsilon'_0 = r'I'_0, \qquad \varepsilon'_1 = r'I'_1,$$

I'_0 et I'_1 étant les valeurs de I' correspondante à I_0 et I_1, la variation de charge du condensateur sera donc égale à

$$Cr'\Delta I'.$$

Or, le courant total I passant de la valeur permanente I_0 à la deuxième valeur permanente I_1 et le condensateur ne donnant passage à aucun courant dès que le régime permament est établi, la

Digitized by Google

variation $\Delta I'$ est nécessairement égale à la variation ΔI ; la variation de charge du condensatsur est donc finalement

$$q'' = Cr'\Delta I ;$$

d'un autre côté, on a

$$q = q' + q''.$$

Cherchons maintenant la condition pour que la quantité totale d'électricité qui traverse AD pour ressortir en EF, soit la même que si le circuit ne contenait ni self-induction, ni condensateur ; quand cette condition sera remplie, on aura

$$I = \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{r + r'}$$

et

$$q = \int I dt = \frac{\int \varepsilon dt + \int \varepsilon' dt}{r + r'},$$

$$q = \frac{E + E'}{r + r'},$$

or, les équations établies plus haut dans le cas où le circuit contient une self-induction et un condensateur,

$$q = \frac{E - L\Delta I}{r}, \qquad q' = \frac{E'}{r'},$$

donnent

$$E = rq + L\Delta I, \qquad E' = r'q',$$

on a donc, en remplaçant E et E' par leur valeur

$$q = \frac{rq + r'q' + L.\Delta I}{r + r'} ;$$

mais

$$q = q' + q'' = q' + Cr'\Delta I,$$

on a donc finalement, toutes réductions faites

$$L = Cr'^2.$$

Telle est la condition à remplir pour que tout se passe comme si l'on n'avait intercalé ni condensateur ni self-induction dans le circuit.

519. — Influence du fer soumis à l'action de circuits parcourus par des courants d'intensité variable. — Soit deux

Digitized by Google

circuits voisins A et A′, enroulés sur la même bobine, le premier contenant une source d'électricité et le second n'en contenant pas, mais simplement fermé sur lui-même. Nous avons déjà étudié les phénomènes qui s'accomplissent dans les deux circuits lorsque la bobine sur laquelle ils sont enroulés ne contient pas de fer. Nous allons chercher maintenant comment il faut modifier les équations générales dans le cas contraire.

Les *f. e. m.* d'induction développées dans le circuit inducteur A sont alors au nombre de trois :

1° La *f. e. m.* de self-induction, $L\frac{dI}{dt}$, due à la variation d'intensité du courant.

2° La *f. e. m.* d'induction mutuelle, $M\frac{dI'}{dt}$, due à la variation d'intensité du courant induit dans A′.

3° La *f. e. m.* d'induction due à la variation du flux de force magnétique du fer.

En supposant que la valeur de ce flux soit la même dans tous les points de la bobine, de façon que chacune des spires inductrice ou induite embrasse le même nombre de canaux de force [1], la *f. e. m.* d'induction développée dans chaque spire de A, sera égale à $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$. La *f. e. m.* totale sera donc égale à $n\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, n désignant le nombre de spires de A. Mais lorsque la valeur de $\mathcal{F}$ est inférieure à 4000 unités par centimètre carré de la section du noyau de fer, on peut sans grande erreur, considérer ce flux comme proportionnel à la force magnéto-motrice qui dans le cas actuel est égale à $4\pi nI + 4\pi n'I'$, n' désignant le nombre de spires du circuit induit A′. Par conséquent si nous désignons par f la valeur du flux magnétique total à l'intérieur du noyau de fer lorsque la force magnéto-motrice est égale à 4π, le flux total $\mathcal{F}$ sera donné par l'équation

$$\mathcal{F} = (nI + n'I')f,$$

(1) Cette hypothèse n'est réalisée rigoureusement que dans le cas où les deux extrémités du noyau de fer sont reliées extérieurement à la bobine par des tiges de fer d'une section suffisante ou lorsque la bobine et le noyau affectent la forme d'un tore.

Digitized by Google

d'où

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = nf\frac{dI}{dt} + n'f\frac{dI'}{dt}.$$

Les équations générales du numéro 498 deviennent donc

$$\begin{aligned} E &= RI + L\frac{dI}{dt} + M\frac{dI'}{dt} + n\left(nf\frac{dI}{dt} + n'f\frac{dI'}{dt}\right) \\ &= RI + (L + n^2f)\frac{dI}{dt} + (M + nn'f)\frac{dI'}{dt}, \\ 0 &= R'I' + L'\frac{dI'}{dt} + M\frac{dI}{dt} + n'\left(nf\frac{dI}{dt} + n'f\frac{dI'}{dt}\right) \\ &= R'I' + (L' + n'^2f)\frac{dI'}{dt} + (M + nn'f)\frac{dI}{dt}. \end{aligned}$$

Elles ne diffèrent des équations primitives que par la valeur des coefficients qui multiplient $\frac{dI}{dt}$ et $\frac{dI'}{dt}$. La valeur de f est d'ailleurs facile à calculer lorsqu'on connaît celle de la perméabilité μ du fer correspondant aux conditions définies plus haut. On aurait en effet, en désignant par l la longueur du noyau de fer (dont les extrémités sont supposées réunies par des barres de fer d'une grande section) et par s sa section

$$f = \frac{4\pi}{\left(\frac{l}{\mu s}\right)} = \frac{4\pi\mu s}{l}.$$

Le problème n'est donc pas plus compliqué que ceux que nous avons traités jusqu'à présent et dans lesquels nous supposions que les circuits ne contenaient pas de fer.

Mais lorsque la densité du flux magnétique à l'intérieur du noyau de fer dépasse notablement la valeur que nous avons admise, le problème présente des difficultés insurmontables parce qu'on ignore la loi qui exprime la perméabilité en fonction de la densité du flux ou, plus exactement, la loi qui représente le flux magnétique total du fer en fonction de la force magnéto-motrice. A la rigueur on pourrait essayer de la représenter approximativement par une fonction algébrique de forme simple mais qui devrait cependant exprimer que ce flux de force tend vers une limite finie lorsque la force

Digitized by Google

magnéto-motrice augmente indéfiniment. Mais la solution du problème n'en serait pas plus avancée pour cela, en raison des difficultés insurmontables que présenterait alors l'intégration des deux équations différentielles simultanées données plus haut. Nous n'entrerons donc pas dans de plus grands développements à ce sujet, nous réservant d'ailleurs d'y revenir dans le second volume lorsque nous traiterons des transformateurs à courants alternatifs. Nous laisserons également de côté, quant à présent, l'étude du phénomène connu sous le nom d'*hystérésis* du fer et qui consiste en ce que l'intensité d'aimantation d'un noyau de fer plongé dans un champ magnétique variable est non seulement une fonction de l'intensité du champ, mais aussi du sens dans lequel cette intensité varie, de sorte qu'à une même valeur de la force magnétisante correspondent deux valeurs différentes de l'intensité d'aimantation. Ces questions sont purement empiriques et doivent par conséquent être classées au nombre de celles que nous étudierons dans le second volume.

Nous ferons remarquer que les considérations précédentes s'appliquent aux courants alternatifs dans lesquels on suppose que le circuit primaire contient une source de *f. e. m.* qui est une fonction sinusoïdale du temps. Lorsque les circuits parcourus par ces sortes de courants ne contiennent pas de fer, ou lorsque le flux de force magnétique induit dans ce fer ne dépasse pas 4 000 unités par centimètre carré, on peut appliquer sans restriction les équations développées dans le chapitre suivant. Mais lorsque la densité du flux magnétique induit dans le fer dépasse cette limite, les courants ne peuvent plus être représentés par une fonction sinusoïdale simple et les équations dont nous parlons, cessent d'être applicables.

Digitized by Google

CHAPITRE TROISIÈME

COURANTS ALTERNATIFS

§ 1. — ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU COURANT ENGENDRÉ DANS UN CIRCUIT DOUÉ DE SELF-INDUCTION PAR UNE F. E. M. SINUSOÏDALE.

520. — Génération d'un courant alternatif [1]. — Reprenons le cas d'un cadre tournant dans un champ magnétique (fig. 275) et supposons, pour plus de simplicité, que ce cadre se compose d'une seule spire; nous savons déjà que le sens du courant engendré dans cette spire par sa rotation dans le champ magnétique, est renversé deux fois pendant une révolution. Quand le cadre sera parallèle à la direction du champ magnétique, la *f. e. m.* d'induction sera maxima et égale à E_0, et à chaque instant, cette *f. e. m.* d'induction aura pour valeur

$$E = E_0 \sin \alpha, \qquad (1)$$

(1) Afin d'éviter de nombreuses répétitions dans le cours de ce chapitre, nous croyons utile de reproduire ici les valeurs des intégrales suivantes :

$$\int \sin 2\pi n t\,dt = -\frac{1}{2\pi n}\cos 2\pi n t + C^{te},$$

$$\int \cos 2\pi n t\,dt = \frac{1}{2\pi n}\sin 2\pi n t + C^{te},$$

$$\int \sin^2 2\pi n t\,dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin 4\pi n t}{4\pi n}\right) + C^{te},$$

$$\int \cos^2 2\pi n t\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\cos 4\pi n t}{4\pi n}\right) + C^{te},$$

$$\int \sin 2\pi n t \cdot \sin(2\pi n t + \alpha)\,dt = \frac{t\cos\alpha}{2} - \frac{1}{8\pi n}(\sin 4\pi n t + \alpha) + C^{te}.$$

Digitized by Google

α étant l'angle que fait le plan du cadre avec la direction des lignes de force.

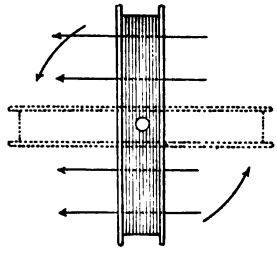

Fig. 275

Mais si on appelle t le temps nécessaire pour décrire l'angle α, T celui qui est nécessaire pour décrire l'angle 2π, c'est-à-dire la durée d'une *période* ou d'une révolution, on aura

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{t}{T},$$

d'où

$$\alpha = 2\pi \frac{t}{T},$$

en remplaçant dans l'équation (1), il vient

$$E = E_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}; \qquad (2)$$

En désignant par n le nombre de *périodes par seconde* ou la *fréquence*, on aura

$$n = \frac{1}{T}$$

Il en résulte que les intégrales définies prises depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$, auront pour valeurs

$$\int_0^1 \sin 2\pi n t dt = 0,$$

$$\int_0^1 \cos 2\pi n t dt = 0,$$

$$\int_0^1 \sin^2 2\pi n t dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \cos^2 2\pi n t dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \sin 2\pi n t \sin (2\pi n t + \alpha) dt = \frac{1}{2} \cos \alpha.$$

Digitized by Google

et en remplaçant dans l'équation (2), $\frac{1}{T}$ par sa valeur, il vient

$$E = E_0 \sin 2\pi n t. \qquad (3)$$

Cette *f. e. m.* donnera naissance à un courant périodique I; le circuit étant, en général, doué de self-induction, on aura

$$E = RI + L\frac{dI}{dt};$$

en égalant ces deux valeurs de la *f. e. m.*, il vient

$$RI + L\frac{dI}{dt} = E_0 \sin 2\pi n t. \qquad (4)$$

Le courant engendré ayant évidemment la même période que la *f. e. m.*, on pourra écrire

$$I = A \cos 2\pi n t + B \sin 2\pi n t, \qquad (5)$$

A et B étant deux constantes qu'il faut déterminer. Pour cela, différentions l'équation (5) il vient

$$\frac{dI}{dt} = -2\pi n A \sin 2\pi n t + 2\pi n B \cos 2\pi n t;$$

en remplaçant dans l'équation (4), I et $\frac{dI}{dt}$ par leurs valeurs, il vient

$$E_0 \sin 2\pi n t = RI - 2\pi n LA \sin 2\pi n t + 2\pi n LB \cos 2\pi n t,$$

ou

$$E_0 \sin 2\pi n t = (RA + 2\pi n LB)\cos 2\pi n t + (RB - 2\pi n LA)\sin 2\pi n t$$

et enfin

$$(RA + 2\pi n LB)\cos 2\pi n t + (RB - 2\pi n LA - E_0)\sin 2\pi n t = 0.$$

Cette équation devant être satisfaite quelle que soit la valeur de t, on doit avoir séparément

$$(RA + 2\pi n LB)\cos 2\pi n t = 0,$$
$$(RB - 2\pi n LA - E_0)\sin 2\pi n t = 0,$$

d'où l'on tire

$$RA + 2\pi n LB = 0,$$
$$RB - 2\pi n LA - E_0 = 0;$$

de ces deux équations, on tire la valeur de A et B

$$A = -\frac{2\pi n L E_0}{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2},$$

$$B = \frac{R E_0}{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2};$$

Digitized by Google

en remplaçant A et B dans l'équation (5), on a

$$I = -\frac{2\pi nLE_0}{R^2+4\pi^2n^2L^2}\cos 2\pi nt + \frac{RE_0}{R^2+4\pi^2n^2L^2}\sin 2\pi nt\,;$$

d'un autre côté, en désignant par φ un angle auxiliaire et par C un coefficient, on a

$$A\cos 2\pi nt + B\sin 2\pi nt = C\sin(2\pi nt+\varphi) = C\sin\varphi\cos 2\pi nt + C\cos\varphi\sin\pi nt,$$

on en tire immédiatement les valeurs de A et de B en fonction de l'angle φ

$$A = C\sin\varphi,$$
$$B = C\cos\varphi,$$

d'où

$$\sqrt{A^2+B^2} = C,$$
$$\frac{A}{B} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Remplaçant, dans cette dernière expression A et B par leurs valeurs, il vient pour la valeur de φ

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\pi nL}{R};$$

mais en remplaçant C par sa valeur, on peut écrire

$$A\cos 2\pi nt + B\sin 2\pi nt = \sqrt{A^2+B^2}\sin(2\pi nt+\varphi);$$

on en déduit, pour la valeur de I, l'expression définitive

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+4\pi^2n^2L^2}}\sin(2\pi nt+\varphi). \qquad (6)$$

521. — Décalage du courant par rapport à la f. e. m. — En discutant l'équation (6), on constate que le maximum du courant a lieu pour

$$2\pi nt+\varphi = \frac{\pi}{2},$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{1}{4n} - \frac{\varphi}{2\pi n},$$

tandis que le maximum de la *f. e. m.* a lieu pour

$$2\pi nt = \frac{\pi}{2},$$

Digitized by Google

d'où

$$t = \frac{1}{4n}.$$

On voit que ces deux maximums ne sont pas simultanés et diffèrent d'un intervalle de temps égal à $\frac{1}{2\pi n} \times \varphi$; le courant est en retard ou *décalé* par rapport à la *f. e. m.*; le maximum angulaire de ce décalage est égal à $\frac{\pi}{2}$ ou 90°, c'est-à-dire qu'il a lieu lorsque le produit nL tend vers l'infini. L'angle φ s'appelle *l'angle de décalage* ; il est donné par la formule que nous avons déjà trouvée

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{2\pi n L}{R}.$$

On voit que cet angle est nul quand la fraction $\frac{nL}{R}$ est nulle, c'est-à-dire quand le coefficient de self-induction du cadre est très petit par rapport à la résistance de ce cadre, ou bien encore, quand le nombre de périodes est très petit par rapport à la résistance; il devient au contraire très grand lorsque le nombre de périodes est lui-même très considérable, à moins cependant que la self-induction ne soit très faible.

Cette discordance entre l'intensité et la *f. e. m.* disparaîtrait, si on appelait *f. e. m.* totale, la somme de E_0 et de $L\frac{dI}{dt}$; on aurait alors à chaque instant

$$I = \frac{E_0 + L\frac{dI}{dt}}{R}$$

et dans un circuit contenant un nombre quelconque de bobines soumises à l'induction, on aurait la formule générale

$$I = \frac{\Sigma E}{R}.$$

§ 2. — RÉSISTANCE APPARENTE D'UN CIRCUIT PARCOURU PAR UN COURANT SINUSOÏDAL.

522. — Impédance du circuit. — Nous venons de voir que le courant est en raison inverse de la valeur du radical

$$\sqrt{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}.$$

Digitized by Google

Si L était nul, ce radical se réduirait à

$$\sqrt{R^2},$$

c'est-à-dire à R; on peut donc dire que le produit

$$4\pi^2 n^2 L^2$$

qui a reçu le nom d'*Inductance*, s'ajoute au carré de la résistance et semble ainsi l'augmenter; il est d'ailleurs du même ordre de grandeur que cette résistance, mais on démontre, comme nous allons le voir, que ce n'est pas une résistance.

Le terme

$$\sqrt{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}$$

a pour cette raison reçu le nom d'*Impédance*.

On remarquera, immédiatement, que si le produit nL est très grand, l'impédance du circuit ne dépend que très peu de la résistance ohmique R.

523. — Résistance apparente des conducteurs parcourus par des courants alternatifs. — L'expérience montre cependant que la résistance ohmique d'un conducteur semble augmenter quand il est parcouru par des courants alternatifs; on explique facilement ce phénomène de la façon suivante.

Chacun des fils élémentaires est soumis à une *f. e. m.* d'induction totale égale à la somme de toutes les *f. e. m.* partielles dues à l'action des autres fils. Mais ces *f. e. m.* partielles sont d'autant plus faibles que la distance des autres fils au fil considéré est plus grande. Or, le fil central est celui dont la distance moyenne aux autres fils est la plus petite, c'est donc celui qui est soumis à l'induction la plus forte et dont par conséquent l'impédance est la plus considérable. Il sera donc traversé par un courant moyen plus faible que celui des fils extérieurs bien que la *d. d. p.* de ses extrémités soit la même que celle de ces derniers; il paraîtra donc plus résistant.

Un fil de la circonférence sera au contraire soumis à une induction moins grande que le fil central, parce que sa distance moyenne aux autres fils est plus grande, la densité du courant dans le conducteur ira donc en diminuant jusqu'au centre où le courant moyen

Digitized by Google

sera relativement faible ; cette inégalité de densité augmente évidemment avec la fréquence ; aussi est-on amené rationnellement à employer des conducteurs tubulaires pour les courants de haute fréquence.

L'augmentation de la résistance n'est donc due en réalité qu'à un effet de self-induction ; le coefficient de self-induction est lui-même modifié ; le calcul montre en effet que l'inégale répartition du courant entre les fils élémentaires qui composent le conducteur, a pour conséquence une augmentation apparente de ce coefficient.

Maxwell a fait connaître la formule suivante pour exprimer la résistance apparente d'un conducteur cylindrique parcouru par des courants alternatifs :

Si on appelle l la longueur du conducteur en centimètres, R sa résistance ohmique en unités C. G. S., R_1 sa résistance apparente et n la fréquence du courant sinusoïdal, on a

$$R_1 = R\left[1 + \frac{1}{12}\frac{l^2}{R^2}(2\pi n)^2 - \frac{1}{180}\frac{l^4}{R^4}(2\pi n)^4 + \cdots\right]$$

et pour le coefficient de self-induction apparent

$$L_1 = l\left[\left(A + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{48}\frac{l^2}{R^2}(2\pi n)^2 + \frac{13}{8640}\frac{l^4}{R^4}(2\pi n)^4 - \cdots\right],$$

A étant un coefficient à déterminer par le calcul et qui ne dépend que des dimensions du conducteur.

Lorsque le conducteur est en fer, ces formules sont modifiées par suite des propriétés magnétiques du fer, et les formules ci-dessus (dans lesquelles on a introduit la perméabilité magnétique μ) deviennent

$$R_1 = R\left[1 + \frac{1}{12}\frac{\mu^2 l^2}{R^2}(2\pi n)^2 - \frac{1}{180}\frac{\mu^4 l^4}{R^4}(2\pi n)^4 + \cdots\right],$$

$$L_1 = l\left\{A + \mu\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\frac{\mu^2 l^2}{R^2}(2\pi n)^2 + \frac{13}{8640}\frac{l^4}{R^4}(2\pi n)^4 - \cdots\right]\right\}.$$

Il est à remarquer que ces formules ne sont applicables qu'en considérant la perméabilité μ du fer comme constante, ce qui n'est vrai que pour les faibles aimantations, pour lesquelles on peut prendre $\mu = 2000$, valeur qui modifie déjà considérablement les valeurs numériques de R_1 et de L_1.

Digitized by Google

Formules pratiques. — Sir William Thomson a calculé, pour la fréquence de 80 périodes par seconde (ce qui correspond à la fréquence des courants alternatifs industriels), le tableau suivant, qui donne le coefficient par lequel il faut multiplier la résistance ohmique d'un conducteur pour avoir la résistance apparente au passage des courants alternatifs :

DIAMÈTRE (en millimètres)	COEFFICIENT
0,5	1,0000
1,0	1,0001
1,5	1,0258
2,0	1,0805
3,0	1,3186
5,0	2,0430
10,0	3,7940
15,0	5,5732
20,0	7,3250

M. Mordey a fait connaître les valeurs du coefficient de résistance en fonction de l'intensité du courant, pour une fréquence égale à 80 périodes. Ces valeurs sont consignées dans le tableau suivant :

FRÉQUENCE	DIAMÈTRE (en millimètres)	COEFFICIENT	INTENSITÉ DU COURANT EN AMPÈRES
80. . . .	1,00	1,0001	55
	1,50	1,0250	133
	2,00	1,0800	220
	2,50	1,1750	»
	4,00	1,6800	»
	10,00	4,8000	»

Enfin MM. Loppé et Bouquet ont donné la formule pratique suivante pour représenter la résistance apparente d'un conducteur :

$$R_1 = R(1 + 7{,}5d^4n^2 10^{-7}),$$

dans laquelle d est le diamètre du conducteur en centimètres et n le nombre de périodes par seconde. Nous ferons remarquer que ni les tableaux ni les résultats de ces différentes formules ne sont d'accord entre eux.

Digitized by Google

524. — Expériences de MM. Jamin et Manœuvrier. — MM. Jamin et Manœuvrier ont démontré, par l'expérience suivante, que la résistance ohmique d'un circuit n'est nullement altérée par le passage d'un courant alternatif.

Dans le circuit d'une machine M à courants alternatifs, sont intercalées une pile P et une boussole des tangentes T (fig. 276).

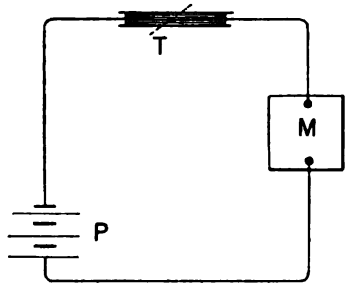

Fig 276

Nous démontrerons plus tard que cet appareil de mesure n'est pas influencé par le passage de courants alternatifs ; la machine étant au repos, on lance dans le circuit le courant de la pile P et on note une certaine déviation de la boussole des tangentes ; on met en marche l'alternateur et on constate que la déviation est restée la même ; on en conclut comme nous allons le voir, que la résistance du circuit n'a pas changé.

En effet, le courant I qui traverse le circuit, dans la deuxième expérience, peut se mettre sous la forme

$$I = \frac{E + E'}{R} = \frac{E}{R} + \frac{E'}{R}.$$

E étant la *f. e. m.* de la pile; E' la somme des *f. e. m.* d'induction qui sont variables à chaque instant.

Or $\frac{E}{R}$ est le courant dû à la pile seule ; $\frac{E'}{R}$ est le courant dû à chaque instant à la somme de toutes les autres *f. e. m.*; mais ces *f. e. m.* étant alternativement positives et négatives et produisant successivement des quantités d'électricité égales et contraires, les courants qui en résultent produisent sur la boussole des tangentes

Digitized by Google

des impulsions égales et contraires qui se détruisent; le courant dû à la pile est donc seul manifesté par cet instrument.

Mais ce courant qui a pour valeur $\frac{E}{R}$ serait modifié si la valeur de R l'était elle-même par suite du passage des courants alternatifs. Ceci n'ayant pas lieu, on en conclut que la résistance ohmique d'un conducteur n'est nullement modifiée par le passage d'un courant périodique représenté par une loi quelconque.

§ 3. — DÉFINITIONS ET MESURE DES CONSTANTES DES COURANTS ALTERNATIFS.

525. — Intensité moyenne d'un courant alternatif. — Par définition, le courant moyen a pour valeur le quotient de la quantité d'électricité engendrée pendant une demi-période par la durée $\frac{1}{2}$ T de cette demi-période; on a donc, en désignant ce courant par I_m

$$I_m = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}T} I dt}{\frac{1}{2}T}.$$

Nous avons intégré la quantité d'électricité entre 0 et $\frac{1}{2}$ T, parce que si on intégrait entre 0 et T, les quantités d'électricité mises en mouvement dans le circuit pendant deux demi-périodes consécutives, seraient égales et de signe contraire et leur somme serait algébriquement nulle.

Cherchons la valeur de I_m; rappelant que nous avons désigné par n le nombre de périodes par seconde; par T la durée d'une période, et que nous avons supposé le courant sinusoïdal, c'est-à-dire exprimé par une équation de la forme $I = I_0 \sin 2\pi nt$, on a

$$I_m = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}T} I dt}{\frac{1}{2}T} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{1}{2}T} I dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{1}{2}T} I_0 \sin 2\pi n t dt,$$

Digitized by Google

$$\int_0^{\frac{1}{2}T} I_0 \sin 2\pi n t dt = \frac{I_0}{\pi n},$$

d'où

$$I_m = \frac{2}{T} \frac{I_0}{\pi n}.$$

Mais $nT = 1$, donc

$$I_m = \frac{2I_0}{\pi}.$$

Le courant moyen ainsi défini, n'a pas d'intérêt pratique, car, ainsi que nous venons de le dire, dans un ampère-mètre ordinaire aussi bien que dans une boussole des tangentes, l'alternance du courant donne à l'aiguille des impulsions qui se détruisent.

Cet inconvénient n'existe pas avec l'électro-dynamomètre dans lequel les forces mises en jeu ont un sens indépendant de celui du courant; nous sommes donc amenés à chercher les conditions d'équilibre de cet appareil sous l'action d'un courant alternatif.

526. — **Valeur du couple exercé sur le cadre d'un électro-dynamomètre par un courant alternatif de forme quelconque.** — Lorsque les deux circuits d'un électro-dynamomètre sont parcourus par le même courant, le couple développé par leur action mutuelle peut être représenté par $C_1 I^2$; C_1 désignant la valeur du couple développé lorsque $I = 1$.

Si on désigne par ω la vitesse angulaire imprimée au cadre par la résultante des forces qui agissent sur lui pendant le temps t; par M le moment d'inertie du cadre mobile; par C_0 le moment de la force développée par le ressort antagoniste, lorsque le cadre mobile semble en repos apparent, on a, à chaque instant, en vertu des lois de la mécanique rationnelle,

$$M \frac{d\omega}{dt} = C_0 - C_1 I^2, \qquad \text{d'où} \qquad \omega = \frac{1}{M} \int_0^t (C_0 dt - C_1 I^2 dt).$$

Si le courant est périodique (sans que, d'ailleurs, sa valeur soit nécessairement exprimable sous une forme analytique) et que l'on suppose nulle la vitesse angulaire initiale du cadre, ainsi que l'intensité initiale du courant, l'équation ci-dessus montre que cette

Digitized by Google

vitesse angulaire sera également nulle à la fin d'une période, lorsque le courant passe de nouveau par zéro, à la condition que l'on ait

$$\int_0^T C_0 dt = \int_0^T C_1 I^2 dt,$$

T représentant la durée d'une période. On tire de là

$$\int_0^T I^2 dt = \frac{C_0}{C_1} T.$$

La vitesse angulaire du cadre mobile sera donc nulle au commencement de chaque période et nous démontrerons plus loin qu'il oscille autour d'une position moyenne en s'en écartant d'autant moins que son moment d'inertie est plus grand et que la durée de la période du courant est plus courte.

527. — Valeur du courant efficace. — Supposons que l'unité de temps contienne un nombre entier de périodes et intégrons depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$, nous aurons en vertu de l'équation précédente

$$\int_0^1 I^2 dt = \frac{C_0}{C_1}.$$

Mais, si au lieu d'un courant d'intensité périodiquement variable, on lançait dans l'appareil un *courant continu* I_e capable de développer le même couple C_0, on aurait, en appliquant à ce courant la même équation

$$\int_0^1 I_e^2 dt = \frac{C_0}{C_1} = \int_0^1 I^2 dt.$$

Le courant I_e étant continu, l'intégrale $\int_0^1 I_e^2 dt$ se réduit à I_e^2 et il vient

$$I_e^2 = \frac{C_0}{C_1} = \int_0^1 I^2 dt \qquad \text{ou} \qquad I_e = \sqrt{\frac{C_0}{C_1}} = \sqrt{\int_0^1 I^2 dt}.$$

La valeur de I_e a reçu le nom d'*Intensité du courant efficace*.

528. — Equation du mouvement vibratoire du cadre d'un électro-dynamomètre lorsqu'il est en repos apparent sous l'action d'un courant sinusoïdal. — Appelons :

M le moment d'inertie des pièces mobiles,

Digitized by Google

C_0 le couple développé par le ressort antagoniste lorsque le cadre mobile est en repos apparent,

C_1 le couple moteur développé lorsque les deux cadres sont traversés par un courant permanent égal à l'unité,

θ la déviation actuelle du cadre.

En appliquant les lois du mouvement angulaire d'un corps qui ne peut que tourner autour d'un axe fixe, et en remarquant que le cadre est soumis à l'action d'un couple C_0 qu'on peut considérer comme constant à cause de la faible amplitude des oscillations et d'un autre couple variable $C_1 I_2$, on aura

$$M \frac{d^2\theta}{dt^2} = C_0 - C_1 I^2, \qquad (1)$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{C_0}{M} - \frac{C_1}{M} I^2.$$

Mais, puisque les courants sont sinusoïdaux, on a

$$I = I_0 \sin 2\pi n t;$$

on en conclut que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{C_0}{M} - \frac{C_1}{M} I_0^2 \sin^2 2\pi n t = \frac{C_0}{M} - \frac{C_1}{2M} I_0^2 + \frac{C_1}{2M} I_0^2 \cos 4\pi n t. \qquad (2)$$

Supposons que l'on tende le ressort jusqu'à ce que le couple C_0 qu'il développe, satisfasse à l'équation

$$\frac{C_0}{M} = \frac{C_1}{2M} I_0^2$$

ou bien

$$C_0 = \frac{C_1}{2} I_0^2; \qquad (3)$$

les deux premiers termes du deuxième membre de l'équation (2) s'annulent et il reste simplement

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{C_1}{2M} I_0^2 \cos 4\pi n t,$$

équation qui montre que dans ces conditions le mouvement du cadre est vibratoire.

De cette équation, l'on tire

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C_1}{2M} I_0^2 \left(\frac{\sin 4\pi n t}{4\pi n} + C^{te} \right).$$

Digitized by Google

En admettant que $\frac{d\theta}{dt}$ est nul lorsque $t = 0$, on aura, en intégrant une deuxième fois,

$$\theta = \frac{C_1}{2M} I_0^2 \left(- \frac{\cos 4\pi nt}{16\pi^2 n^2} + C^{te} \right).$$

Cette équation nous montre que l'amplitude angulaire ou élongation totale que l'on obtient en faisant successivement

$$\cos 4\pi nt = +1 \qquad \text{et} \qquad \cos 4\pi nt = -1$$

et en retranchant l'une de l'autre les valeurs correspondantes de θ dans lesquelles on a remplacé $C_1 I_0^2$ par $2C_0$ tirée de l'équation (3), a pour expression

$$\frac{2C_0}{16\pi^2 M n^2} = \frac{C_0}{8\pi^2 M n^2};$$

cette équation nous montre en outre que la *durée d'une période oscillatoire de l'instrument est égale à la moitié de celle de la période du courant.*

529. — **Mesure de l'intensité efficace d'un courant sinusoïdal.** — L'équation

$$I_e = \sqrt{\int_0^1 I^2 dt}$$

nous fait connaître ce que l'on appelle l'intensité du courant efficace quelle que soit la loi analytique qui représente l'intensité du courant en fonction du temps.

Si nous supposons que ce courant est sinusoïdal, on aura

$$I = I_0 \sin 2\pi nt,$$

d'où

$$I^2 = I_0^2 \sin^2 2\pi nt = I_0^2 \frac{1 - \cos 4\pi nt}{2};$$

on tire de là

$$\int_0^t I^2 dt = I_0^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 4\pi nt}{8\pi n} \right),$$

et si on suppose qu'il y ait un nombre entier de périodes dans l'unité de temps, on trouve, en faisant $t = 1$,

$$\int_0^1 I^2 dt = \frac{I_0^2}{2},$$

Digitized by Google

d'où

$$I_e = \sqrt{\frac{1}{2}}\, I_0,$$

ou encore

$$I_0 = \sqrt{2}\, I_e.$$

Nous avons vu (527) que l'électro-dynamomètre fait connaître la valeur de I_e, quelle que soit la loi du courant ; si cette loi est représentée par une fonction sinusoïdale, l'instrument fait donc connaître aussi I_0, c'est-à-dire la valeur maxima du courant.

Ses indications permettent de trouver également la valeur du courant moyen I_m tel que nous l'avons défini (525) ; on a en effet

$$I_m = \frac{2I_0}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\, I_e = 0{,}9003\, I_e.$$

530. — **Définitions du potentiel efficace et du potentiel moyen ; leur mesure au moyen de l'électromètre.** — Supposons qu'un électromètre à quadrants soit mis en communication avec les bornes d'un appareil traversé par des courants alternatifs ; l'une des paires de quadrants et l'aiguille aboutissent à l'une des bornes tandis que l'autre paire est en communication avec l'autre borne. Dans ces conditions, l'aiguille est soumise à chaque instant à un couple proportionnel au carré de la différence de potentiel (169) ; il y a donc une analogie complète entre la nature des forces appliquées à l'aiguille d'un électromètre et celles qui entrent en jeu dans l'électro-dynamomètre, puisque dans ce dernier, le couple appliqué au cadre mobile est à chaque instant proportionnel au carré de l'intensité du courant. Nous pourrons donc appliquer à l'électromètre toutes les équations déjà établies pour l'électro-dynamomètre en remplaçant simplement dans ces équations l'intensité du courant par la différence de potentiel ; on aura donc pour la valeur V_e de la *d. d. p.* apparente accusée par l'électromètre sous l'influence de potentiels périodiques

$$V_e = \sqrt{\int_0^{t_1} V^2 dt};$$

cette valeur de V_e s'appelle *la d. d. p. efficace*.

Digitized by Google

Si le courant est sinusoïdal, le potentiel est représenté par une expression de la forme

$$V = V_0 \sin 2\pi nt + \varphi,$$

sa valeur maxima est donc égale à V_0 ; on aura donc, dans ce cas

$$V_e = \sqrt{\frac{1}{2}} V_0$$

d'où

$$V_0 = \sqrt{2}\, V_e$$

et enfin on trouve que la *d. d. p.* moyenne V_m, pendant une demi-période étant définie par la relation

$$V_m = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}T} V dt}{\frac{1}{2}T}$$

qui devient dans le cas actuel

$$V_m = \frac{2V_0}{\pi},$$

donne, en remplaçant comme nous venons de le dire, le courant par la *d. d. p.*

$$V_m = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_e = 0{,}9003 V_e.$$

531. — Emploi de l'Electro-dynamomètre pour mesurer la différence de potentiel entre deux points d'un circuit parcouru par des courants alternatifs. — Supposons que les deux bobines de l'électro-dynamomètre (composées de fil fin très résistant) soient groupées en série et que les extrémités du circuit ainsi formé soient placées en dérivation sur les deux points dont on veut mesurer la différence de potentiel. En appelant V cette différence de potentiel à un instant quelconque, et V_0 la différence maxima, on a

$$V = V_0 \sin 2\pi nt.$$

L'intensité du courant I qui passera dans le circuit de l'instrument à un instant donné, sera

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}} . \sin (2\pi nt + \varphi).$$

Digitized by Google

Le maximum de ce courant aura lieu pour

$$\sin(2\pi nt + \varphi) = 1$$

et il sera égal à

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}}.$$

Il est facile de trouver le couple C_0 que doit développer le ressort antagoniste pour maintenir le cadre en repos apparent, puisque nous avons déjà vu (528) que ce couple est donné par l'équation

$$C_0 = \frac{1}{2} C_1 I_0^2,$$

C_1 étant le couple nécessaire pour ramener le cadre mobile au 0 quand tout l'instrument est parcouru par un courant permanent égal à l'unité.

Remplaçons I_0 par sa valeur tirée de cette équation

$$I_0 = \sqrt{\frac{2C_0}{C_1}},$$

il vient

$$V_0 = \sqrt{\frac{2C_0}{C_1}(R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2)} = \sqrt{\frac{2C_0}{C_1}}\sqrt{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}.$$

Le rapport $\frac{C_0}{C_1}$ peut être remplacé par le rapport des angles de torsion correspondants; il suffira donc pour déterminer V_0, de connaître le nombre n de périodes du courant ainsi que le coefficient de self-induction et la résistance du circuit de l'électro-dynamomètre.

On verra qu'il est possible d'éviter ces calculs par l'emploi d'un condensateur, mais cette solution est peu pratique, puisqu'à chaque changement du nombre de périodes il faudrait un condensateur d'une capacité différente.

On peut mesurer avec l'électro-dynamomètre le potentiel efficace, puisque l'on a

$$V_e = \sqrt{\frac{1}{2}} V_0,$$

donc

$$V_e = \sqrt{\frac{C_0}{C_1}}\sqrt{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}.$$

Digitized by Google

532. — Expression du travail produit par un courant alternatif. — Dans un circuit doué de self-induction, le travail dû à cette self-induction, quand le courant qui traverse le circuit part d'une certaine valeur pour y revenir, est nul, à la condition toutefois qu'il n'y ait pas d'induction mutuelle créée par des circuits voisins. On n'a donc pas à tenir compte de la self-induction, dans l'expression du travail développé par un courant périodique pendant la durée d'une période.

Toute l'énergie développée dans ce cas par le courant, se transforme en chaleur. En effet, en désignant par E la *f. e. m.* variable, on a, à chaque instant

$$E = RI + L\frac{dI}{dt},$$

d'où, en multipliant par Idt et en intégrant de 0 à t,

$$\int_0^t EIdt = \int_0^t RI^2dt + \frac{1}{2}L(I^2 - I_0^2),$$

I_0 désignant la valeur de I lorsque $t = 0$. Si l'on donne à t une valeur telle que le courant repasse par la valeur I_0 (ce qui a lieu lorsque t est égal à la durée T d'une période), le second membre se réduit à

$$\int_0^T RI^2dt,$$

qui représente la quantité d'énergie transformée en chaleur d'après la loi de Joule.

Or, l'électro-dynamomètre nous fait connaître par une simple lecture, la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^1 I^2dt,$$

puisque nous avons vu (527) que l'on a

$$\int_0^1 I^2dt = \frac{C_0}{C_1}.$$

Donc s'il y a un nombre entier de périodes dans l'unité de temps, le travail calorifique développé dans le circuit pendant l'unité de temps, aura pour expression

$$R\int_0^1 I^2dt = R\frac{C_0}{C_1} = RI_0^2.$$

Digitized by Google

L'électro-dynamomètre permet donc de mesurer la valeur du travail calorifique accompli dans un circuit parcouru par un courant périodique de forme quelconque, lorsqu'on connaît la résistance R de ce circuit. Si le circuit est disposé de façon à ne donner lieu à aucune dépense d'énergie autre que la chaleur développée par le fait de sa résistance, l'expression ci-dessus donnera la valeur du travail total du courant, quelle que soit la loi qui le représente, en fonction du temps.

Lorsque le courant est sinusoïdal, on a

$$I = I_0 \sin 2\pi nt, \qquad \text{et} \qquad \int_0^t RI^2 dt = \frac{1}{2} RI_0^2.$$

533. — **Expression du travail total accompli dans un circuit traversé par un courant sinusoïdal, dans le cas le plus général.** — Soit à un instant t quelconque, V la *d. d. p.* entre les deux extrémités du circuit et V_0 le maximum de cette *d. d. p.*. Le courant étant sinusoïdal, on a

$$V = V_0 \sin 2\pi nt.$$

Le courant I qui traverse le circuit, a d'autre part, pour expression, en désignant par I_0 sa valeur maxima,

$$I = I_0 \sin (2\pi nt - \varphi).$$

φ désignant un angle dont nous apprendrons bientôt à déterminer la valeur expérimentalement et qui dépend de la self-induction du circuit, des inductions mutuelles dues à des circuits voisins ainsi que de la nature des travaux accomplis dans le circuit considéré.

Le travail électrique accompli par le courant pendant un temps t a pour expression

$$\int VI dt ;$$

ou, en remplaçant V et I par leurs valeurs,

$$\int V_0 I_0 \sin 2\pi nt . \sin (2\pi nt - \varphi) dt,$$

Le travail accompli pendant une période par le courant, est égal à

$$\int_0^T V_0 I_0 \sin 2\pi nt . \sin (2\pi nt - \varphi) dt = \frac{1}{2} TV_0 I_0 \cos \varphi.$$

Digitized by Google

Pendant une seconde, ce travail sera

$$\frac{1}{2} n\mathrm{T} V_0 I_0 \cos\varphi,$$

ou, comme $n\mathrm{T} = 1$,

$$\frac{1}{2} V_0 I_0 \cos\varphi.$$

On voit que ce travail serait nul si la *d. d. p.* V_0 et le courant I_0 étaient déphasés de 90°; or, ce travail ne pouvant jamais être nul, on en conclut qu'il est impossible d'avoir un déphasement de 90°.

534. — Actions mécaniques réciproques de deux courants sinusoïdaux déphasés. — La mesure de l'angle φ peut se faire au moyen de l'électro-dynamomètre; mais pour le démontrer, il nous faut chercher d'abord la valeur du couple développé entre les deux bobines de cet instrument lorsqu'elles sont parcourues par deux courants sinusoïdaux de même période, mais déphasés et ayant en outre des intensités efficaces différentes. Supposons d'abord que ces deux courants soient simplement périodiques mais représentés par une loi quelconque et désignons par I et I′ leur valeur à l'instant t, par C_0 le couple développé par le ressort antagoniste lorsque le cadre mobile est en repos apparent, et par C_1 le couple développé entre les deux cadres lorsqu'ils sont tous deux traversés par un courant continu égal à l'unité. Des calculs identiques à ceux qui sont développés au n° 526, montrent que le cadre mobile sera en repos apparent lorsqu'on donnera au ressort une tension telle que l'on ait

$$\int_0^{\mathrm{T}} C_0 dt = \int_0^{\mathrm{T}} C_1 \mathrm{II}' dt,$$

d'où on tire, en intégrant le premier membre

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{II}' dt = \frac{C_0}{C_1} \mathrm{T}.$$

L'intégrale $\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{II}' dt$ a la même valeur dans chacune des périodes successives; elle est donc contenue n fois dans l'unité de temps: il en résulte que l'on a

$$\int_0^1 \mathrm{II}' dt = \frac{C_0}{C_1} n\mathrm{T},$$

Digitized by Google

ou enfin, puisque $nT = 1$,

$$\int_0^1 II'dt = \frac{C_0}{C_1}.$$

Cette égalité a lieu pour tous les courants périodiques; les courants étant sinusoïdaux dans le cas particulier qui nous occupe, il vient

$$I = I_0 \sin 2\pi nt, \qquad I' = I'_0 \sin (2\pi nt + \alpha),$$

$$II' = I_0 I'_0 \sin 2\pi nt . \sin (2\pi nt + \alpha) ;$$

mais

$$\sin 2\pi nt . \sin (2\pi nt + \alpha) = \frac{1}{2}\left[\cos \alpha - \cos (4\pi nt + \alpha)\right];$$

on en conclut que

$$\int II'dt = \frac{1}{2} I_0 I'_0 \left(t \cos \alpha - \frac{\sin (4\pi nt + \alpha)}{4\pi n}\right).$$

Pour une période, cette intégrale aura pour valeur

$$\int_0^T II'dt = \frac{1}{2} I_0 I'_0 T \cos \alpha$$

et pour l'unité de temps, elle devient

$$\int_0^1 II'dt = \frac{1}{2} I_0 I'_0 \cos \alpha.$$

Mais le même électro-dynamomètre peut nous donner I_0 et I'_0; on a en effet (529)

$$I_0 = \sqrt{2}\, I_e, \qquad I'_0 = \sqrt{2}\, I'_e,$$

d'où

$$I_0 I'_0 = 2 I_e I'_e$$

et

$$\int_0^1 II'dt = I_e I'_e \cos \alpha.$$

En multipliant les deux membres par C_1 il vient

$$C_1 \int_0^1 II'dt = C_1 I_e I'_e \cos \alpha.$$

Le premier membre de cette équation représente la valeur du couple moyen exercé sur le cadre mobile lorsque l'un des cadres est parcouru par le courant I et l'autre par le courant I' ; on voit que cette valeur est exprimée en fonction des quantités connues I_e, I'_e, $\cos \alpha$, et qu'elle est la plus grande possible lorsque $\alpha = 0$ ou π, c'est-à-dire

Digitized by Google

lorsque la différence de phase des deux courants est nulle ou égale à $\frac{1}{2}$ période. Si la différence de phase était égale à $\frac{1}{4}$ de période, on aurait $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha = 0$ et le couple moyen serait nul. Le cadre resterait en repos apparent sans qu'il fût besoin de donner aucune tension au ressort antagoniste.

535. — **Mesure de la différence de phase de deux courants sinusoïdaux.** — En désignant par C''_0 le couple moyen représenté par l'expression $C_t \int_0^t II'dt$, par C_e et C'_0 les couples développés lorsque les deux cadres de l'électro-dynamomètre sont parcourus, d'abord par le courant I, ensuite par le courant I' on a (534, 527)

$$\int_0^t II'dt = \frac{C''_0}{C_t}, \qquad I_e = \sqrt{\frac{C_0}{C_t}}, \qquad I'_e = \sqrt{\frac{C'_0}{C_t}},$$

d'où on tire, en vertu de l'équation

$$\int_0^t II'dt = I_e I'_e \cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{C''_0}{\sqrt{C_0 C'_0}}.$$

Les angles de torsion du ressort antagoniste étant proportionnels aux couples, on peut écrire également

$$\cos\alpha = \frac{\alpha''}{\sqrt{\alpha\alpha'}}.$$

α, α', α'' représentant les angles de torsion correspondant aux couples C_0, C'_0, C''_0.

536. — **Application du mesureur d'énergie à la mesure du travail produit par un courant sinusoïdal.** — Comme exemple d'application des formules que nous venons de trouver, cherchons à mesurer, au moyen d'un électro-dynamomètre spécial (mesureur d'énergie de M. Marcel Deprez) (446) le travail produit par un courant sinusoïdal.

Soit PP' (fig. 277) un conducteur traversé par le courant principal I qui produit un travail utile en M (moteur, lampe, etc...), DD'

Digitized by Google

un conducteur dérivé. Plaçons dans cet ensemble trois électrodynamomètres *identiques* E_1, E_2, E_3. Les deux bobines de E_1 groupées en tension sont parcourues par le courant principal I, les deux

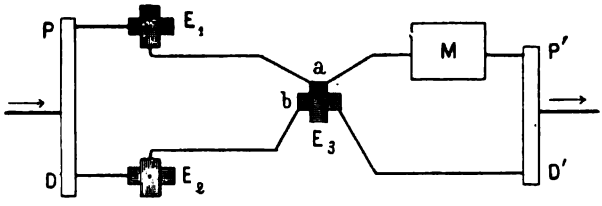

Fig. 277

bobines de E_2 également groupées en tension sont parcourues par le courant dérivé I'; la bobine fixe *a* de E_3 étant parcourue par I, la bobine mobile *b* est parcourue par I'.

L'énergie développée pendant une seconde, dans le circuit PP', est exprimée par l'intégrale

$$\int_0^1 \mathrm{V}\mathrm{I}dt.$$

Cherchons la valeur de cette intégrale en fonction des indications des trois instruments.

La *d. d. p.* V, entre les conducteurs PD et P'D', est donnée par l'équation

$$\mathrm{V} = \mathrm{R}'\mathrm{I}' + \mathrm{L}'\frac{d\mathrm{I}'}{dt};$$

en multipliant les deux membres de cette équation par $\mathrm{I}dt$, il vient

$$\mathrm{V}\mathrm{I}dt = \mathrm{R}'\mathrm{I}\mathrm{I}'dt + \mathrm{L}'\mathrm{I}d\mathrm{I}'$$

et

$$\int \mathrm{V}\mathrm{I}dt = \mathrm{R}'\int \mathrm{I}\mathrm{I}'dt + \mathrm{L}'\int \mathrm{I}d\mathrm{I}'. \qquad (1)$$

Supposons maintenant que les courants soient sinusoïdaux, c'est-à-dire que l'on ait

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_0 \sin 2\pi nt, \qquad \mathrm{I}' = \mathrm{I}'_0 \sin(2\pi nt + \alpha),$$

d'où l'on tire

$$d\mathrm{I}' = 2\pi n\mathrm{I}'_0 \cos(2\pi nt + \alpha)dt$$

Digitized by Google

et en remplaçant dans $Id\mathrm{I}'$, le produit de deux sinus par la somme de deux autres sinus

$$Id\mathrm{I}' = \pi n \mathrm{I}_0 \mathrm{I}'_0 \Big[\sin(4\pi n t + \alpha) - \sin\alpha \Big] dt,$$

d'où

$$\int Id\mathrm{I}' = \pi n \mathrm{I}_0 \mathrm{I}'_0 \Big[-\frac{\cos(4\pi n t + \alpha)}{4\pi n} - t \sin\alpha \Big] + \mathrm{c^{te}},$$

qui donne

$$\int_0^t Id\mathrm{I}' = -\pi n \mathrm{I}_0 \mathrm{I}'_0 \sin\alpha. \qquad (2)$$

D'autre part, on a

$$\int \mathrm{II}'dt = \int \mathrm{I}_0 \mathrm{I}'_0 \sin 2\pi n t \sin(2\pi n t + \alpha) dt,$$

qui donne, en effectuant les mêmes transformations que ci-dessus,

$$\int \mathrm{II}'dt = \mathrm{I}_0 \mathrm{I}'_0 \int \frac{1}{2} \Big[\cos\alpha - \cos(4\pi n t + \alpha) \Big] dt,$$

d'où

$$\int \mathrm{II}'dt = \frac{1}{2} \mathrm{I}_0 \mathrm{I}'_0 \Big[t \cos\alpha - \frac{\sin(4\pi n t + \alpha)}{4\pi n} \Big] + \mathrm{c^{te}},$$

et par suite

$$\int_0^t \mathrm{II}'dt = \frac{1}{2} \mathrm{I}_0 \mathrm{I}'_0 \cos\alpha,$$

et enfin

$$\cos\alpha = 2 \frac{\int_0^t \mathrm{II}'dt}{\mathrm{I}_0 \mathrm{I}'_0},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{4\Big(\int_0^t \mathrm{II}'dt\Big)^2}{\mathrm{I}_0^2 \mathrm{I}_0'^2}}.$$

Mais l'électro-dynamomètre E_1 donne

$$\int_0^t \mathrm{I}^2 dt = \frac{\mathrm{C}_0}{\mathrm{C}_1},$$

l'électro-dynamomètre E_2,

$$\int_0^t \mathrm{I}'^2 dt = \frac{\mathrm{C}'_0}{\mathrm{C}_1},$$

Digitized by Google

l'électro-dynamomètre E_3,

$$\int_0^t II'dt = \frac{C_0''}{C_1}. \qquad (3)$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^t I^2 dt = \frac{I_0^2}{2} \qquad \text{d'où} \qquad I_0^2 = 2\frac{C_0}{C_1},$$

$$\int_0^t I'^2 dt = \frac{I_0'^2}{2} \qquad \text{d'où} \qquad I_0'^2 = 2\frac{C_0'}{C_1},$$

les valeurs de $\cos\alpha$ et de $\sin\alpha$ deviennent

$$\cos\alpha = \frac{C_0''}{\sqrt{C_0 C_0'}} \qquad \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{C_0''^2}{C_0 C_0'}}$$

et finalement, on a, en remplaçant dans l'équation (1) $\int II'dt$, $\int Idl'$ par leurs valeurs tirées des équations (3) et (2)

$$\int_0^t VI dt = R' \frac{C_0''}{C_1} - \frac{2\pi n L'}{C_1} \sqrt{C_0 C_0' - C_0''^2}.$$

On pourra à l'aide d'un seul instrument mesurer C_0, C_0', C_0'', par un simple changement de connexions et éviter ainsi l'emploi de trois instruments.

Nous verrons, quand nous parlerons des mesures électriques, d'autres méthodes pour mesurer le travail produit par un courant périodique même quand il n'est pas sinusoïdal. Nous n'avons voulu donner ici cette méthode, que comme application intéressante des équations qui régissent les courants alternatifs.

§ 4. — EFFETS PRODUITS PAR UN CONDENSATEUR INTERCALÉ DANS UN CIRCUIT DOUÉ DE SELF-INDUCTION ET SOUMIS A L'ACTION D'UNE F. E. M. SINUSOÏDALE.

537. — Moyen d'annuler les effets de la self-induction par l'emploi d'un condensateur intercalé dans le circuit. — Considérons un circuit (fig. 278) contenant une source A de *f. e. m.* sinusoïdale, des bobines B, B douées de self-induction et un con-

Digitized by Google

densateur C qui, étant intercalé dans le circuit, empêche absolument le passage d'un courant permanent tandis qu'au contraire, comme nous allons le voir, il ne s'oppose pas au passage d'un courant alternatif.

Appelons, E la *f. e. m.* variable de la source ; V, la différence

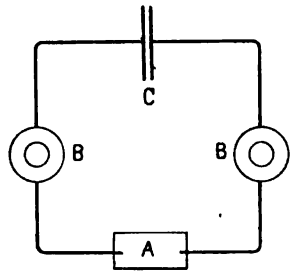

Fig. 278

de potentiel des armatures du condensateur ; C, sa capacité ; L, la self-induction du circuit et R la résistance que présenterait le circuit si les armatures du condensateur se touchaient ; nous aurons, à chaque instant

$$E = V + RI + L\frac{dI}{dt}. \qquad (1)$$

Il vient donc, en différentiant cette équation par rapport au temps

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dV}{dt} + R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2}. \qquad (2)$$

Mais, en désignant par Q la charge du condensateur, on a

$$V = \frac{Q}{C},$$

d'où

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt};$$

on a d'ailleurs

$$\frac{dQ}{dt} = I;$$

il vient donc

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{C}I + R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2}. \qquad (3)$$

Digitized by Google

Si le circuit ne contenait pas de condensateur et s'il n'était pas doué de self-induction, on aurait simplement

$$E = RI \qquad \text{et} \qquad \frac{dE}{dt} = R\frac{dI}{dt}.$$

Il faut donc, pour que tout se passe comme si cette condition était remplie, que l'on ait

$$\frac{1}{C} I + L\frac{d^2I}{dt^2} = 0$$

ou

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{CL} I = 0. \qquad (4)$$

Cette équation différentielle est satisfaite lorsqu'on suppose que le courant est de la forme

$$I = I_0 \sin 2\pi nt.$$

On a alors

$$\frac{dI}{dt} = 2\pi n I_0 \cos 2\pi nt$$

$$\frac{d^2I}{dt^2} = -4\pi^2 n^2 I_0 \sin 2\pi nt.$$

En remplaçant dans l'équation (4) I et ses dérivées par leurs valeurs, il vient :

$$\frac{1}{CL} I_0 \sin 2\pi nt - 4\pi^2 n^2 I_0 \sin 2\pi nt = 0$$

ou enfin

$$4\pi^2 n^2 CL = 1,$$

$$n^2 CL = \frac{1}{4\pi^2}, \qquad (5)$$

équation qui montre à quelle relation doivent satisfaire le nombre de périodes du courant par seconde, la capacité C du condensateur et la self-induction L, pour que l'intensité du courant soit, à chaque instant, représentée par l'équation simple

$$I = \frac{E}{R},$$

E étant la *f. e. m. sinusoïdale* qui agit sur le circuit. *Cette f. e. m.*

Digitized by Google

peut avoir une origine quelconque ; elle peut être due par exemple à l'induction exercée par un circuit voisin sur les bobines B, B.

Le produit n^2CL est indépendant du choix des unités; on peut écrire en effet symboliquement

$$n^2 = \left(\frac{\textit{Nombre de périodes}}{\textit{Temps}}\right)^2, \qquad C = \frac{\textit{Quantité d'électricité}}{\textit{Potentiel}},$$

ou, en vertu des relations démontrées au n° 377,

$$C = \frac{(\textit{Temps})^2}{\textit{Longueur}}$$

et enfin

$$\textit{Coefficient de self-induction}\ (L) = \textit{Longueur}.$$

Donc

$$n^2CL = (\textit{Nombre de périodes})^2.$$

Le produit n^2CL, est donc homogène au carré d'un nombre abstrait et par suite complètement indépendant des unités de longueur, de masse et de temps.

Exemple numérique. — Nous allons chercher le nombre de périodes que devrait avoir un courant sinusoïdal pour qu'un circuit doué d'une self-induction de 1 quadrant et dans lequel est intercalé un condensateur de 1 microfarad, se comporte comme s'il n'y avait ni condensateur, ni self-induction.

L'équation

$$n^2CL = \frac{1}{4\pi^2}$$

donne

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{CL}};$$

mais, par hypothèse

$$C = \frac{1}{1000000}\ \text{de farad}, \qquad L = 1\ \textit{quadrant};$$

en remplaçant ces quantités par leurs valeurs dans l'équation de n, on trouve

$$n = 159\ \text{périodes par seconde.}$$

Dans un tel circuit, bien qu'il soit coupé par le condensateur, l'intensité du courant sinusoïdal aura, à chaque instant, pour valeur l'expression simple

$$I = \frac{E}{R}.$$

Digitized by Google

538. — Valeur de la différence de potentiel des armatures du condensateur. — Si nous supposons que l'équation générale

$$E = V + RI + L\frac{dI}{dt} \qquad (1)$$

se réduise, grâce à l'interposition du condensateur, à l'équation

$$E = RI.$$

Il en résultera que

$$V + L\frac{dI}{dt} = 0; \qquad (2)$$

or, en désignant par E_0 la *f. e. m.* maxima, on a

$$I = \frac{E}{R} = \frac{E_0 \sin 2\pi nt}{R}$$

et par conséquent

$$L\frac{dI}{dt} = \frac{2\pi nL}{R} E_0 \cos 2\pi nt.$$

L'équation (2) nous donnera donc, en remplaçant $L\frac{dI}{dt}$ par sa valeur

$$V = -\frac{2\pi nL}{R} E_0 \cos 2\pi nt. \qquad (3)$$

Telle est la valeur de la différence de potentiel entre les armatures du condensateur. En faisant

$$t = 0$$

on aura la valeur maxima de V

$$-\frac{2\pi nL}{R} E_0.$$

On voit que la *f. e. m.* maxima E_0 qui engendre le courant sinusoïdal est multipliée par le facteur

$$\frac{2\pi nL}{R}$$

qui peut atteindre facilement de très grandes valeurs. Ainsi, comme exemple, supposons que L soit égal à 1 quadrant et R à 1 ohm; si le nombre de périodes est de 50 par seconde, on trouve pour la valeur maxima de V

$$V_0 = -314.E_0,$$

Digitized by Google

c'est-à-dire que la *d. d. p.* maxima des armatures du condensateur serait plus de 300 fois aussi grande que la *f. e. m.* maxima E_0.

539. — Energie potentielle totale du système. — Nous allons démontrer que l'énergie potentielle totale emmagasinée dans le condensateur et la bobine douée de self-induction, reste constante.

En effet, l'énergie due à la self-induction, a pour valeur, à chaque instant

$$\frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} LI_0^2 \sin^2 2\pi nt$$

ou bien, puisque

$$I = \frac{E_0 \sin 2\pi nt}{R}$$

$$\frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{LE_0^2}{R^2} \sin^2 2\pi nt. \qquad (4)$$

D'autre part, l'énergie potentielle du condensateur est égale à

$$\frac{1}{2} CV^2$$

ou, en vertu de l'équation (3),

$$\frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} C \frac{4\pi^2 n^2 L^2}{R^2} E_0^2 \cos^2 2\pi nt. \qquad (5)$$

Mais C est donné par l'équation que nous avons trouvée plus haut

$$4\pi^2 n^2 CL = 1,$$

d'où

$$C = \frac{1}{4\pi^2 n^2 L};$$

en remplaçant C par cette valeur dans l'équation (5), il vient

$$\frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{LE_0^2}{R^2} \cos^2 2\pi nt. \qquad (6)$$

Ajoutons (4) et (6) pour avoir l'énergie potentielle totale; il vient

$$\frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{LE_0^2}{R^2} = C^{te}.$$

L'énergie potentielle totale emmagasinée est donc bien constante.

Digitized by Google

§ 5. — THÉORIE DES BOBINES D'INDUCTION.

540. — Calcul de la f. e. m. développée dans le circuit induit d'une bobine d'induction lorsqu'il est ouvert. — On sait qu'une bobine d'induction consiste en deux bobines concentriques, l'une intérieure à gros fil, constituant le circuit primaire ; l'autre extérieure à fil fin, constituant le circuit secondaire. Afin de rendre possibles les calculs, nous supposerons que la bobine ne contient pas de noyau de fer ; dans ce cas, les équations fondamentales qui régissent les courants inducteurs et induits développés dans les deux circuits, le circuit induit ne contenant pas de source de *f. e. m.*, sont

$$E = RI + L\frac{dI}{dt} + M\frac{dI'}{dt},$$

$$0 = R'I' + L'\frac{dI'}{dt} + M\frac{dI}{dt}.$$

Mais le circuit secondaire étant rompu, la deuxième équation se réduit à

$$0 = R'I' + M\frac{dI}{dt}$$

et nous conduit, en remarquant que R′ est infini, à une indétermination facile à lever, puisque nous savons que les *f. e. m.* se réduisent dans ce cas, à la seule *f. e. m.* d'induction mutuelle

$$M\frac{dI}{dt};$$

nous aurons donc, en la désignant par E′,

$$E' = -M\frac{dI}{dt}$$

que l'on peut écrire

$$E' = -\frac{M}{L}L\frac{dI}{dt};$$

mais, de la première équation, on tire

$$L\frac{dI}{dt} = (E - RI) - M\frac{dI'}{dt}$$

Digitized by Google

qui se réduit à $E - RI$ puisque I' est constamment nul; on a donc finalement

$$E' = -\frac{M}{L}(E - RI).$$

En désignant par n et n' le nombre de spires du circuit primaire et du circuit secondaire, coupées par centimètre carré d'une section plane passant par l'axe de la bobine, nous savons que l'on a

$$M = m \times n \times n'$$

et

$$L = l \times n^2,$$

m et l étant les valeurs respectives de M et de L quand on a

$$n = 1$$

et

$$n' = 1;$$

on en conclut que

$$E' = -\frac{n'}{n}\frac{m}{l}(E - RI),$$

qui se réduit sensiblement à

$$E' = -\frac{n'}{n}\frac{m}{l}E,$$

lorsqu'on suppose la résistance très petite.

Telle est la valeur de la *f.e.m.* d'induction développée dans le circuit induit lorsqu'il est coupé. Cette équation justifie l'emploi de fils fins dans le circuit induit et de gros fil dans le circuit inducteur des bobines d'induction où le but est de rendre E' le plus grand possible; on est conduit ainsi à prendre n' très grand et n très petit.

541. — Calcul de la f.e.m. et du courant induits dans le circuit secondaire d'une bobine d'induction lorsque le courant inducteur est sinusoïdal. — Soit I le courant sinusoïdal qui traverse le circuit primaire d'une bobine d'induction ; à chaque instant, il est donné par l'équation

$$I = I_0 \sin 2\pi n t, \qquad (1)$$

I_0 étant la valeur maxima de I.

Par suite des phénomènes de self-induction et d'induction mu-

Digitized by Google

tuelle, le courant induit I′ se trouvera en retard d'un certain angle α sur le courant inducteur et on aura

$$I' = I'_0 \sin(2\pi nt + \alpha), \tag{2}$$

équation que l'on peut écrire, en développant $\sin(2\pi nt + \alpha)$,

$$I' = I'_0 \sin\alpha \cos 2\pi nt + I'_0 \cos\alpha \sin 2\pi nt ; \tag{3}$$

le circuit secondaire ne contenant pas de source de *f. e. m.*, sera parcouru par un courant induit donné par l'équation générale

$$0 = R'I' + L'\frac{dI'}{dt} + M\frac{dI}{dt}. \tag{4}$$

Mais l'équation (3) donne par différentiation

$$\frac{dI'}{dt} = 2\pi nI'_0 \cos\alpha \cos 2\pi nt - 2\pi nI'_0 \sin\alpha \sin 2\pi nt ;$$

on a de même, en différentiant l'équation (1),

$$\frac{dI}{dt} = 2\pi nI_0 \cos 2\pi nt.$$

En remplaçant dans l'équation (4), $\frac{dI'}{dt}$ et $\frac{dI}{dt}$ par les valeurs que nous venons de trouver, on arrive à l'équation suivante, ordonnée par rapport à cos $2\pi nt$ et sin $2\pi nt$:

$$0 = (R'I'_0 \sin\alpha + 2\pi nL'I'_0 \cos\alpha + 2\pi nMI_0) \cos 2\pi nt$$
$$+ (R'I'_0 \cos\alpha - 2\pi nL'I'_0 \sin\alpha) \sin 2\pi nt.$$

Cette équation doit être satisfaite quelle que soit la valeur attribuée à t ; il en résulte que les coefficients de cos $2\pi nt$ et de sin $2\pi nt$ doivent être nuls, on a donc

$$R'I'_0 \sin\alpha + 2\pi nL'I'_0 \cos\alpha + 2\pi nMI_0 = 0, \tag{5}$$

$$R'I'_0 \cos\alpha - 2\pi nL'I'_0 \sin\alpha = 0. \tag{6}$$

Nous avons ainsi deux équations qui vont nous permettre de déterminer I'_0 et α. De l'équation (6) on tire

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R'}{2\pi nL'},$$

Digitized by Google

et par conséquent

$$\cos\alpha = \frac{2\pi nL'}{\sqrt{R'^2 + 4\pi^2 n^2 L'^2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{R'}{\sqrt{R'^2 + 4\pi^2 n^2 L'^2}}.$$

En remplaçant dans l'équation (5), $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ par leurs valeurs, on trouve

$$\frac{R'^2 + 4\pi^2 n^2 L'^2}{\sqrt{R'^2 + 4\pi^2 n^2 L'^2}} I'_0 = -2\pi nMI_0,$$

d'où l'on tire

$$I'_0 = \frac{-2\pi nM}{\sqrt{R'^2 + 4\pi^2 n^2 L'^2}} I_0. \qquad (7)$$

Telle est la valeur du courant maximum traversant le circuit secondaire. On aura la valeur de ce courant à un instant quelconque, en remplaçant dans (3) I'_0, $\sin\alpha$, et $\cos\alpha$, par leurs valeurs, et on trouve ainsi :

$$I' = -\left[\frac{2\pi nMR'}{R'^2 + 4\pi^2 n^2 L'^2} I_0 \cos 2\pi nt + \frac{4\pi^2 n^2 L'M}{R'^2 + 4\pi^2 n^2 L'^2} I_0 \sin 2\pi nt\right]. \quad (8)$$

Cherchons maintenant la valeur totale de la *f. e. m.* d'induction développée dans le circuit secondaire dépourvu de source de *f. e. m.*; elle a pour expression

$$E' = -\left[M\frac{dI}{dt} + L'\frac{dI'}{dt}\right]. \qquad (9)$$

Remplaçons dans (9) $\frac{dI}{dt}$ et $\frac{dI'}{dt}$ par leurs valeurs données plus haut, il vient

$$E' = -\left[\left(2\pi nM + \frac{8\pi^3 n^3 L'^2 M}{R'^2 + 4\pi^2 n^2 L'^2}\right)\cos 2\pi nt - \frac{4\pi^2 n^2 ML'R'}{R'^2 + 4\pi^2 n^2 L'^2}\sin 2\pi nt\right] I_0. \quad (10)$$

Les équations (8) et (10) constituent la solution complète du problème qui nous occupe.

542. — Examinons le cas particulier où le circuit induit est ouvert, c'est-à-dire où l'on a

$$R' = \infty.$$

Digitized by Google

La valeur de E′ se réduit dans ce cas à

$$E' = -2\pi n M \cos 2\pi n t I_0.$$

Si au contraire la résistance R′ devient négligeable, on pourra poser

$$R' = 0$$

et alors on a

$$E' = -4\pi n M \cos 2\pi n t I_0.$$

On voit que, dans les deux cas, la *f. e. m.* induite est déphasée de 1/4 de période par rapport au courant inducteur et qu'elle est proportionnelle au maximum I_0 de ce courant; quant à la valeur de I′, elle est évidemment nulle dans le premier cas; dans le deuxième, le courant induit I′ devient égal à

$$\frac{M}{L'} I_0 \sin 2\pi n t,$$

il est donc de même phase que le courant inducteur.

543. — Calcul du rapport des quantités d'énergie développées dans les deux circuits. — Il reste maintenant à chercher ce qu'on pourrait appeler le rendement économique de la bobine d'induction, c'est-à-dire le rapport entre l'énergie développée dans le circuit induit et l'énergie dépensée pendant le même temps dans le circuit inducteur; ce rapport a pour mesure

$$\frac{\int_0^1 E'I'dt}{\int_0^1 EIdt}.$$

On peut trouver sa valeur sans être obligé d'effectuer le calcul des intégrales générales $\int EIdt$ et $\int E'I'dt$, en se servant simplement des théorèmes généraux déjà établis et qui conviennent aux courants périodiques quelle que soit leur forme.

En effet, remarquons que le travail total dépensé pendant l'unité de temps dans le circuit inducteur, se compose de deux parties (499) l'une qui a pour valeur

$$\int_0^1 RI^2 dt$$

Digitized by Google

qui représente la chaleur développée pendant l'unité de temps dans le circuit inducteur et l'autre

$$\int_0^1 \mathrm{M} I dI'$$

qui représente l'énergie transmise à travers l'espace du premier circuit au second.

Dans le circuit secondaire qui ne contient pas de *f. e. m.* extérieure, toute l'énergie développée par les *f. e. m.* d'induction se transforme en chaleur ; or, le travail dû à la *f. e. m.* d'induction émanant du circuit primaire, a pour valeur

$$\int_0^1 \mathrm{M} I' dI$$

et nous avons démontré (499) que cette intégrale était égale à

$$\int_0^1 \mathrm{M} I dI' ;$$

qui représente le travail développé par les *f. e. m.* d'induction dans le circuit secondaire et qui se transforme finalement en une quantité de chaleur représentée par l'intégrale

$$\int_0^1 \mathrm{R}' I'^2 dt.$$

On a donc en définitive

$$\int_0^1 \mathrm{M} I dI' = \int_0^1 \mathrm{M} I' dI = \int_0^1 \mathrm{R}' I'^2 dt.$$

Par conséquent le travail total dépensé dans le circuit primaire pendant l'unité de temps, sera égal à

$$\int_0^1 \mathrm{R} I^2 dt + \int_0^1 \mathrm{R}' I'^2 dt,$$

tandis que le travail fourni par le circuit secondaire sous forme de chaleur, pendant l'unité de temps, se réduit à

$$\int_0^1 \mathrm{R}' I'^2 dt.$$

Le rendement économique de la bobine d'induction, est égal au

Digitized by Google

rapport de ces deux travaux. Mais les deux courants étant sinusoïdaux, on a

$$\int_0^{\tau} RI^2 dt + \int_0^{\tau} R'I'^2 dt = \frac{1}{2} RI_0^2 + \frac{1}{2} R'I_0'^2$$

et par suite, le rendement k a pour valeur

$$k = \frac{R'I_0'^2}{RI_0^2 + R'I_0'^2} ;$$

mais l'équation (7) nous donne I'_0 en fonction de I_0 et on trouve, toutes réductions faites

$$k = \frac{4\pi^2 n^2 M^2 R'}{4\pi^2 n^2 M^2 R' + R(R'^2 + 4\pi^2 n^2 L'^2)}.$$

On voit que lorsque n devient très grand, le rendement tend vers la fraction

$$\frac{M^2 R'}{M^2 R' + L'^2 R},$$

tandis qu'il s'annule pour $n = 0$.

Nous nous bornerons aux calculs que nous venons de donner sur la théorie des bobines d'induction qui ne contiennent pas de fer. Toutes ces équations s'appliquent encore au cas où la bobine d'induction contient du fer, mais à la condition, toutefois, que la densité du flux magnétique dans le fer ne dépasse pas 3 000 à 4 000 unités C. G. S. par centimètre carré. Dans le cas contraire, le problème ne peut plus être résolu avec précision ; nous étudierons du reste ce cas dans le deuxième volume en abordant la question des transformateurs industriels.

544. — Actions mécaniques développées entre deux circuits, inducteur et induit, parcourus par des courants sinusoïdaux périodiques. — Expériences d'Elihu Thomson. — L'étude des bobines d'induction nous conduit à étudier les actions mécaniques qui se développent entre deux bobines dont l'une B (fig. 279) est parcourue par un courant sinusoïdal périodique et l'autre A fermée sur elle-même. Nous avons vu (534) que le couple moyen exercé entre les deux cadres d'un électro-dyna-

Digitized by Google

momètre, lorsqu'ils sont parcourus simultanément par des courants sinusoïdaux déphasés d'un angle α, a pour expression

$$\frac{1}{2} C_1 I_0 I'_0 \cos \alpha.$$

Il est facile d'en déduire que, si on désigne par F l'effort moyen développé entre deux circuits parcourus par des courants sinusoïdaux déphasés, on a

$$F = \frac{1}{2} F_1 I_0 I'_0 \cos \alpha,$$

F_1 étant l'effort exercé par l'unité de courant permanent traversant

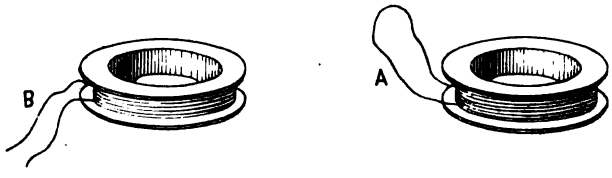

Fig. 279

simultanément les deux bobines ; I_0 et I'_0, les valeurs maxima des courants sinusoïdaux et α l'angle de déphasement. Or, les équations que nous venons de trouver, donnent

$$I'_0 = -\frac{2\pi n M}{\sqrt{R'^2 + 4\pi^2 n^2 L'^2}} I_0,$$

$$\cos \alpha = \frac{2\pi n L'}{\sqrt{R'^2 + 4\pi^2 n^2 L'^2}},$$

d'où l'on déduit

$$F = -F_1 \frac{2\pi^2 n^2 M L'}{R'^2 + 4\pi^2 n^2 L'^2} I_0^2.$$

Telle est l'expression de l'effort moyen exercé entre le circuit inducteur et le circuit induit ; on voit que cet effort n'est jamais nul quelles que soient les valeurs attribuées à n, M, L', et R' pourvu qu'elles soient différentes de zéro.

On peut citer comme une confirmation des calculs que nous venons de faire, l'expérience suivante due à Elihu Thomson. Une

Digitized by Google

bobine verticale E (fig. 280) sur laquelle est enroulé un seul fil, est traversée par un courant périodique sinusoïdal ; si, autour de cette bobine on place un anneau métallique A, on peut, pourvu que l'intensité du courant soit suffisante, obtenir que cet anneau malgré son

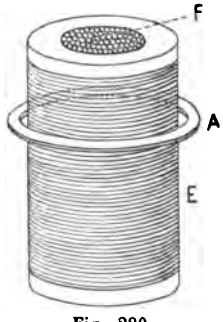

Fig. 280

poids, reste suspendu en l'air sous l'influence des actions mécaniques que nous venons d'étudier.

On constate également comme l'indique notre formule que cette action est d'autant plus faible que le métal de l'anneau est plus mauvais conducteur, et qu'elle cesse lorsqu'on le coupe en un point quelconque. On renforce considérablement ces actions mécaniques en mettant au centre de la bobine un faisceau de fil de fer F que l'on aperçoit sur la figure.

§ 6. — PROBLÈMES SUR LES COURANTS ALTERNATIFS.

545. — Limite de l'intensité d'un courant sinusoïdal dont la f. e. m. maxima est proportionnelle à la fréquence. — Nous allons chercher la limite de l'intensité d'un courant alternatif dont la *f. e. m.* maxima est proportionnelle au nombre d'alternances, comme cela a lieu avec les machines industrielles. Pour cela, reprenons l'équation

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}} \sin(2\pi n t + \varphi) ;$$

Digitized by Google

on voit immédiatement que si on pose

$$E_0 = C^{te}$$

et si on augmente indéfiniment le nombre n de périodes par seconde, le courant I tendra vers 0.

Mais si nous supposons que E_0 soit proportionnel à n, c'est-à-dire que l'on ait

$$E_0 = ne_0,$$

e_0 étant la *f. e. m.* maxima développée pour $n = 1$; on aura

$$I = \frac{ne_0}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}} \sin(2\pi nt + \varphi),$$

que l'on peut écrire

$$I = \frac{e_0}{\sqrt{\frac{R^2}{n^2} + 4\pi^2 L^2}} \sin(2\pi nt + \varphi).$$

Si on fait alors tendre n vers l'infini, le courant I tendra vers la limite

$$\frac{e_0}{2\pi L} \sin(2\pi nt + \varphi),$$

c'est-à-dire qu'il deviendra *indépendant de la résistance ohmique*.

546. — Limite du travail produit dans l'unité de temps par un courant sinusoïdal dont la f. e. m. maxima est proportionnelle à la fréquence. — Dans l'expression du travail produit par un courant alternatif pendant une période

$$\int_0^T EI dt,$$

remplaçons E et I par leur valeur en fonction de E_0; le courant étant supposé sinusoïdal nous aurons, pour la valeur du travail pendant une période

$$W_0^T = \int_0^T \frac{E_0^2}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}} \sin 2\pi nt \sin(2\pi nt - \varphi) dt ;$$

en faisant l'intégration et en tenant compte de la relation

$$\cos.\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}},$$

il vient

$$W_0^T = \frac{RE_0^2}{2n(R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2)};$$

Digitized by Google

ce travail étant répété n fois dans l'unité de temps, on a

$$W_0^1 = \frac{RE_0^2}{2(R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2)}.$$

Si on pose, comme dans le numéro précédent,

$$E_0 = ne_0,$$

on aura

$$W_0^1 = \frac{Re_0^2}{\frac{2R^2}{n^2} + 8\pi^2 L^2};$$

en faisant tendre n vers l'infini, la limite de cette expression sera

$$\frac{Re_0}{8\pi^2 L^2}.$$

Mais le couraut limite a été trouvé égal à

$$\frac{e_0}{2\pi L} \sin(2\pi nt - \varphi);$$

le travail est donc bien encore égal à la moitié du produit de la résistance du circuit, par le carré de l'intensité maxima pendant une période, résultat que nous avons déjà trouvé.

547. — Analogie qui existe entre les équations qui régissent les courants sinusoïdaux et celles qui représentent certains phénomènes mécaniques. — Considérons une masse M assujettie à se mouvoir suivant la droite OM (fig. 281) et animée

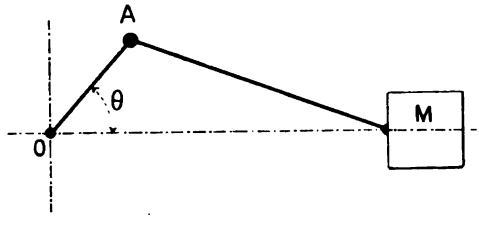

Fig. 281

d'un mouvement alternatif à l'aide d'une bielle très longue MA et d'une manivelle OA accomplissant n révolutions dans l'unité de temps.

En désignant par θ l'angle que fait la manivelle à un instant

Digitized by Google

quelconque avec la droite OM ; par a la longueur de la manivelle; par x l'abscisse du point A, on a

$$x = a \cos \theta = a \cos 2\pi nt ;$$

d'un autre côté, la vitesse V de M est égale à la projection horizontale de la vitesse de A, c'est-à-dire que l'on a

$$V = \frac{dx}{dt} = -2\pi na \sin 2\pi nt,$$

et en désignant par V_1 le produit $2\pi na$,

$$V = -V_1 \sin 2\pi nt,$$

d'où

$$\frac{dV}{dt} = -2\pi n V_1 \cos 2\pi nt.$$

Supposons maintenant que la masse M soit soumise à un effort résistant proportionnel à la vitesse, on aura pour la valeur de l'effort à appliquer à M, en désignant par f_1 la résistance correspondant à l'unité de vitesse,

$$F = f_1 V + M \frac{dV}{dt},$$

ou, en remplaçant V et $\frac{dV}{dt}$ par leurs valeurs données plus haut,

$$F = -f_1 V_1 \sin 2\pi nt - 2\pi n M V_1 \cos 2\pi nt.$$

Le travail à fournir pendant le temps dt a pour expression

$$FV dt = f_1 V_1^2 \sin^2 2\pi nt + 2\pi n M V_1^2 \sin 2\pi nt . \cos 2\pi nt$$

et, pendant une seconde, ce travail aura pour valeur

$$\int_0^1 FV dt = \frac{1}{2} f_1 V_1^2.$$

Le travail dépensé par seconde ne dépend donc que de V_1 et nullement du nombre de périodes.

En posant

$$na = C^{te}$$

on trouve que la vitesse V_1 est constante, de sorte que le travail dépensé par seconde est constant quel que soit n; mais il n'en est pas de même de l'effort appliqué au bouton de la manivelle par l'in-

Digitized by Google

termédiaire de la bielle AM, effort dans l'expression duquel, le terme $2\pi n\mathrm{MV}_1$ augmente indéfiniment avec n. On peut, en effet, écrire

$$\mathrm{F} = -\sqrt{f_1^2 + 4\pi^2 n^2 \mathrm{M}^2}\,.\,\mathrm{V}_1 \sin(2\pi nt + \varphi),$$

l'angle φ étant donné par l'équation

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\pi n\mathrm{M}}{f_1};$$

l'effort F tend donc vers l'infini; il aurait pour résultat de faire casser les pièces de transmission.

Pour établir l'analogie avec un courant périodique, remplaçons V par l'intensité I, à l'instant t, d'un courant périodique; f_1, par la résistance totale R du circuit, traversé par le courant; F, par la *f. e. m.* E nécessaire pour que le courant atteigne la valeur I; et M par le coefficient de self-induction L du circuit, nous retrouvons les équations que nous avons déjà établies.

$$\mathrm{E} = \mathrm{RI} + \mathrm{L}\frac{d\mathrm{I}}{dt},$$

et comme

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_0 \sin 2\pi nt,$$

on aura

$$\mathrm{E} = \sqrt{\mathrm{R}^2 + 4\pi^2 n^2 \mathrm{L}^2}\,\mathrm{I}_0 \sin(2\pi nt + \varphi)$$

et

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\pi n\mathrm{L}}{\mathrm{R}},$$

enfin

$$\int_0^1 \mathrm{EI}dt = \frac{1}{2}\mathrm{RI}_0^2.$$

Nous voyons encore que le travail dépensé par seconde ne dépend que de I_0 et nullement du nombre de périodes, tandis que la *f. e. m.* E_0 tend vers l'infini; on peut donc dire que l'analogie entre ces deux sortes de phénomènes est complète.

Digitized by Google

RÉSISTANCE DES MÉTAUX ET ALLIAGES

Métaux et alliages à la température de 0°

Nature des conducteurs	Résistance spécifique en unités C. G. S.	Résistance en Ohms d'un fil de 1 mètre pesant 1 gr.	Résistance en Ohms d'un fil de 100 mètres et 1m/m de diamètre	Observations
Argent recuit	1,492	0,1517	1,899	
» écroui. . . .	1,620	0,1650	2,062	
Cuivre recuit	1,584	0,1415	2,017	
» écroui. . . .	1,621	0,1443	2,063	
Or recuit	2,041	0,4007	2,598	
» écroui.	2,077	0,4076	2,644	
Aluminium recuit . .	2,889	0,0743	3,678	
Zinc comprimé . . .	5,580	0,3993	7,105	
Platine recuit	8,981	1,9250	11,435	
Fer recuit.	9,636	0,7518	12,27	
Nickel recuit . . .	12,356	1,0520	15,73	
Etain comprimé. . .	13,103	0,9564	16,68	
Plomb comprimé . .	19,465	2,2170	24,78	
Antimoine comprimé.	35,210	2,3700	44,83	
Bismuth comprimé .	130,100	12,8000	165,60	
Mercure liquide . . .	94,340	12,8260	120,11	
ALLIAGES				
2Pt + 1Ag	24,187	2,9070	30,79	
2Au + 1Ag	10,776	1,6380	13,72	
9Pt + 1Ir.	21,633	4,6510	27,54	
Maillechort	20,760	1,8170	26,43	

Métaux et alliages employés dans la construction des boîtes de résistance.

	Valeur de ρ en Microhms	Coefficient thermique en millionièmes	
Kruppine	85,5	+ 700	Peut être chauffé à 600° sans altération.
Cuivre rouge	1,57	+ 4000	
ALLIAGE FLEITMANN WITTE ET Cie A SCHWERTE (WESTPHALIE) :			
Extra dur.	53,1	— 29	
» doux	50,3	+ 59	
Ia Ia dur.	50,2	— 11	
» doux	47,1	+ 5	599m,7 par kilomètre pour 1m/m de diamètre.
Nickeline dure. . . .	43,6	+ 76	
» doux. . . .	40,7	+ 77	
Alliage 686Cu+300Mn +14Fe.	108	de +... à —...	Pouvoir thermo-électrique de cet alliage avec le cuivre : $\frac{1}{100\,000}$ de volt par degré.

Digitized by Google

RÉSISTANCE DES LIQUIDES EN OHMS PAR CENTIMÈTRE CUBE

Acide sulfurique. . .	SO^4H	à 15°	9,15
— — . . .	$SO^4H + 13HO$	22°	1,26
Sulfate de zinc . . .	$SO^4Zn + 24HO$	23°	18,00
— cuivre . .	$SO^4Cu + 45HO$	22°	19,10
Acide chlorhydrique.	$HCl + 7,5HO$	23°	1,28
Chlorhydrate d'ammoniaque	(dissolution au $\frac{1}{10}$)	. . . . .	5,68
Potasse	(» »)	. . . . .	3,20
Eau (pure ordinaire)		environ	9000
Eau (aussi pure que possible)		plus de un million d'ohms.	

RÉSISTANCE DES DIÉLECTRIQUES EN MÉGOHMS PAR CENTIMÈTRE CUBE

Glace.	Plus de 100000 fois plus résistante que l'eau.		
Verre ordinaire . . .	0°	10^9	
Cristal	0°	$1,5 \times 10^{13}$	
Porcelaine	0°	5×10^{11}	
Mica	vers 20°	8×10^7	
Gutta-percha	vers 24°	5×10^8	
Ebonite.	vers 46°	3×10^{10}	
Paraffine	vers 46°	3×10^{10}	

Digitized by Google

Digitized by Google

APPENDICE

AU PREMIER VOLUME

Digitized by Google

Digitized by Google

NOTE 1

EXPÉRIENCES DE M. MARCEL DEPREZ SUR LES DISTANCES EXPLOSIVES DES ÉTINCELLES ÉLECTRIQUES FAITES AVEC UNE MACHINE DYNAMO-ÉLECTRIQUE

(Creil — 1886).

Les résultats consignés dans le tableau ci-après, ont été obtenus avec une machine dynamo-électrique à haut potentiel ayant servi à Creil aux expériences de transmission de la force en 1886-1887.

Les deux électrodes entre lesquels éclataient les étincelles, étaient réunies d'une part aux bornes de la machine par deux conducteurs présentant une très grande résistance, de façon à éviter tout danger résultant d'une fermeture en court circuit. Ces électrodes étaient reliées d'autre part à un galvanomètre Deprez-d'Arsonval dont les déviations avaient été rendues proportionnelles aux intensités du courant par un procédé dû à M. Marcel Deprez et qui sera décrit dans l'électrométrie. Dans le circuit de ce galvanomètre, était intercalée une résistance de 100 000 ohms, de sorte qu'à chaque milli-ampère traversant le circuit du galvanomètre, correspondait une différence de potentiel d'au moins 100 volts entre les deux électrodes. Il suffisait donc de lire le nombre de milli-ampères indiqué par le galvanomètre pour en conclure la *d. d. p.* des deux électrodes dont l'une était fixée à une vis micrométrique grâce à laquelle on pouvait mesurer exactement la distance des électrodes lorsque l'étincelle éclatait.

Digitized by Google

Intensité du courant dans la machine I	DIFFÉRENCE DE POTENTIEL K = 208v		Distance explosive millimètres	OBSERVATIONS
	Déviation (1)	ε volts		
3,5	16,4	3412	0,67	Les surfaces d'éclatement sont de forme sphérique.
4,25	20	4161	0,87	
5,08	23,5	4864	1,06	
6,19	28,5	5930	1,39	
7,07	32,2	6697	1,62	
	35,5	7384	1,88	
3,04	13,5	2808	0,75	Les surfaces d'éclatement sont en forme de disques plats.
3,96	17,5	3640	0,94	
5,55	24,5	5096	1,32	
6,38	28	5824	1,60	
	31,2	6490	1,80	
	34	7072	2,00	
	35,5	7384	2,15	

(1) Chaque degré de déviation du galvanomètre, correspond à une différence de potentiel de 208v.

Digitized by Google

NOTE II

DISTRIBUTION DES QUANTITÉS DE MAGNÉTISME DANS LA RÉGION POLAIRE D'UN AIMANT

Nous avons vu que les aimants dont on se sert habituellement dans la pratique, sont loin de pouvoir être considérés comme des aimants simples théoriques réduits à deux pôles ; on peut estimer chaque région polaire comme atteignant le quart de la longueur de l'aimant, la région neutre étant par conséquent égale à la moitié environ de cette longueur.

On peut se proposer de construire un aimant composé présentant une distribution donnée de magnétisme, au moyen d'aimants élémentaires égaux entre eux.

Soit par exemple à construire un aimant tel que la quantité de magnétisme libre soit de 100 unités à chacune de ses extrémités, de 90 unités à 1 centimètre de ses extrémités, de 80 unités à 2 centimètres, etc..., ces quantités décroissant de 10 unités par centimètre, depuis 100 unités jusqu'à 0, la région neutre s'étendant sur une longueur donnée.

Pour résoudre ce problème, prenons des aimants élémentaires d'une longueur égale à 1 centimètre et possédant à chaque extrémité une quantité de magnétisme libre égale à l'unité ; juxtaposons 100 de ces aimants élémentaires, de manière à former une sorte de faisceau dont tous les pôles nord sont situés à l'extrémité gauche de l'aimant à construire. Nous aurons ainsi, à une extrémité du faisceau, 100 unités de magnétisme libre du signe +, tandis que l'autre

Digitized by Google

extrémité contiendra 100 unités de signe contraire. Mettons maintenant à la suite du premier faisceau, un second faisceau composé de (100 + 90) aimants orientés de la même façon que les premiers et dont, par conséquent, les pôles + seront en contact avec les pôles — du premier faiseau. Le plan de contact de ces deux faisceaux contiendra donc une quantité de magnétisme libre égale à

$$-100 + 190 = +90.$$

A la suite de ce second faisceau, mettons-en un troisième composé de (190 + 80) aimants, et orientés de la même façon; le plan de contact du troisième et du second faisceau, contiendra une quantité de magnétisme libre égale à $-190 + 270 = +80$. En continuant ainsi, il est facile de voir que le dixième faisceau devra être composé de 550 aimants élémentaires et que le plan de contact de sa face positive avec la face négative du neuvième faisceau, ne contiendra que 10 unités de magnétisme libre positif, cette face étant située à 9 centimètres de l'extrémité positive du premier faisceau. Si nous voulons arriver à la région neutre, il faudra ajouter un onzième faisceau composé également de 550 aimants dont la face positive étant en contact avec la face négative du dixième faisceau, contiendra une quantité de magnétisme libre égale à $+550 - 550 = 0$.

A partir de ce moment, nous pouvons prolonger autant que nous voudrons la région neutre en mettant, à la suite les uns des autres, un certain nombre de faisceaux identiques au dixième; puis pour constituer la région polaire négative, nous placerons à l'endroit où nous voulons la faire commencer, un faisceau identique au neuvième; ensuite un faisceau identique au huitième, et ainsi de suite. Nous aurons ainsi, à l'extrémité négative de l'aimant, un faisceau identique au premier qui sera composé de 100 aimants dont l'extrémité libre contiendra 100 unités de magnétisme négatif. De cette façon, la distribution du magnétisme libre, dans la région négative, sera identique à ce qu'elle était dans la région positive.

Cette méthode est générale et s'applique à une distribution de magnétisme régie par une loi quelconque.

Le moment magnétique de l'aimant ainsi construit est évidemment égal à la somme des moments magnétiques de tous les aimants

Digitized by Google

élémentaires qui le composent, tandis que la quantité de magnétisme libre qu'il contient est égale à celle du dernier faisceau qui précède la région neutre.

Quant à la position des pôles, elle se détermine par des considérations d'ordre mécanique, en remarquant que l'on appelle pôle un point situé sur l'axe longitudinal de l'aimant et par lequel passe la résultante de toutes les forces extérieures appliquées à la moitié de l'aimant dans laquelle est situé le pôle considéré. Si toutes ces forces sont parallèles, le pôle coïncide avec le centre de gravité de l'aire de la courbe formée en prenant pour ordonnées les quantités de magnétisme libre et pour abscisses les longueurs comptées à partir du centre de l'aimant.

Digitized by Google

NOTE III

AIMANT ÉQUIVALENT A UN SYSTÈME D'AIMANTS

Considérons un système d'aimants agissant sur une masse magnétique unité située à une distance très grande par rapport aux dimensions du système. Nous allons chercher à déterminer le moment magnétique et l'orientation d'un aimant unique exerçant sur la masse-unité un effort égal à la résultante des actions de tous ces aimants.

Prenons d'abord le cas de deux aimants ; ces deux aimants étant voisins, on ne changera pas leur action sur la masse-unité en faisant accomplir à l'un d'eux un mouvement de translation pour amener son centre en coïncidence avec le centre de l'autre aimant ; mais le moment magnétique de chacun de ces aimants étant le produit de la quantité de magnétisme qui existe à chaque pôle par la distance qui sépare ces pôles, ne sera pas changé, si on substitue à chacun d'eux un aimant ayant à chaque pôle une quantité de magnétisme égale à l'unité et une longueur numériquement égale à son moment magnétique. On aura donc ainsi remplacé l'ensemble des deux aimants par un système d'aimants ab, $a'b'$ (fig. 282) ayant leur centre en un point O de l'espace et possédant à chaque pôle des quantités de magnétisme égales à l'unité. Nous allons démontrer que l'aimant résultant, c'est-à-dire celui qui produirait sur la masse-unité, une action égale et de même sens que l'ensemble des deux aimants, est représenté, en grandeur et direction par la diagonale du parallélogramme construit sur ab, $a'b'$.

Digitized by Google

En effet joignons ab' et $a'b$, et considérons ab' et $a'b$ comme représentant des aimants qui pourront évidemment remplacer les deux aimants ab, $a'b'$, puisque nous n'avons rien changé à la situation des masses magnétiques a, b, a', b' ; nous ne changerons pas l'action de ces deux nouveaux aimants sur la masse-unité, en raison de leurs grandes distances à cette masse, en les transportant parallèlement à eux-mêmes en Oa'_1 et Ob'_1. Ce mouvement opéré, on aura

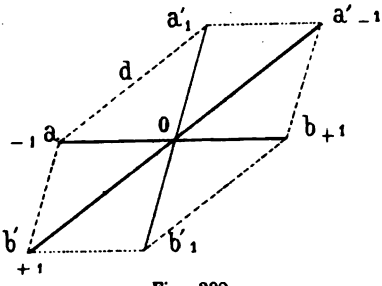

Fig. 282

constitué en $a'_1b'_1$ un aimant unique possédant l'un de ses pôles en a'_1 l'autre en b'_1 et un point neutre en O, et ayant sur la masse-unité la même action que les deux aimants primitifs. Mais la droite $a'_1b'_1$ est précisément égale au double de la diagonale du parallélogramme construit sur Oa et Oa' comme côtés, c'est-à-dire sur les deux moitiés des aimants composants ; elle est donc égale à la diagonale totale, ce qu'il fallait démontrer.

Il est bien évident que ce que nous venons de dire pour deux aimants, s'étendrait à un nombre quelconque d'aimants en appliquant le théorème connu sous le nom de polygone des forces.

Digitized by Google

NOTE IV

EMPLOI DES ÉLECTRO-AIMANTS A LA PLACE D'AIMANTS PERMANENTS DANS LA MÉTHODE DE GAUSS (271 à 279)

Nous avons dit (276) au sujet de la précision de la méthode de Gauss, qu'elle était d'autant plus grande que le rapport $\frac{D}{\lambda}$, ainsi que la déviation θ de l'aiguille étaient plus grands; or, ces deux conditions sont incompatibles, car l'angle θ augmente en même temps que $\frac{D}{\lambda}$ diminue.

Cet antagonisme pourrait être évité ou tout au moins atténué en employant, à la place d'aimants permanents, des électro-aimants dont les actions peuvent être rendues beaucoup plus puissantes; ce qui permettrait d'augmenter le rapport $\frac{D}{\lambda}$ sans diminuer θ.

Mais l'emploi des électro-aimants soulève, au premier abord, deux objections. Il faut, en effet: 1° rendre ces électro-aimants invariables; 2° annuler l'effet extérieur des solénoïdes magnétisants afin de ne pas compliquer les calculs.

Pour résoudre la première difficulté, il suffit de maintenir le courant magnétisant rigoureusement constant pour avoir une aimantation constante; on arrivera aisément à ce résultat à l'aide d'un galvanoscope très sensible, donnant toujours des indications identiques. Nous disons, à dessein, galvanoscope, car il est inutile de connaître l'intensité exacte du courant aimantant; ce qui est nécessaire, c'est d'avoir toujours le même courant.

Quant à la seconde objection, qui résulte de l'action perturbatrice des solénoïdes magnétisants, nous allons voir qu'il est facile de la lever.

Digitized by Google

En effet, la méthode de Gauss se compose, comme nous le savons, de deux opérations : 1° la mesure du produit $\mathcal{M}h$ du moment magnétique de l'aimant, par l'intensité de la composante horizontale du champ terrestre ; 2° la mesure du rapport $\frac{\mathcal{M}}{h}$.

Voici comment on devrait procéder dans ces deux opérations si on employait des électro-aimants au lieu d'aimants permanents.

1° Mesure du produit $\mathcal{M}h$. — Le barreau de fer doux *ab* (fig. 283) supposé rectiligne, est placé, ainsi que le solénoïde aimantant S qui

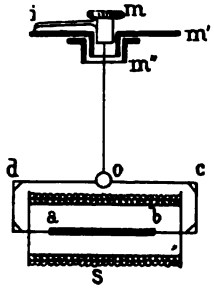

Fig. 283

l'enveloppe sans le toucher, dans la direction, préalablement déterminée, du méridien magnétique. On commence par vérifier la coïncidence des axes du barreau et du solénoïde : pour cela, il suffit, le barreau étant suspendu à un fil sans torsion O*m* par l'intermédiaire d'un cadre *abcd*, de faire passer le courant dans le solénoïde S ; s'il y a dévialion du barreau, c'est que la coïncidence n'est pas obtenue. On fera alors tourner le solénoïde d'un angle convenable jusqu'à ce que la fermeture du courant ne donne lieu à aucune déviation ; à ce moment, les axes du solénoïde et du barreau coïncideront.

Cette coïncidence établie, on fait tourner l'ensemble du barreau *ab* et du solénoïde S de 90° par rapport au méridien magnétique, grâce à un dispositif représenté sur la figure ; puis on lance le courant dans le solénoïde ; le barreau est alors soumis à un couple qui le fait dévier et qui a pour expression le produit $\mathcal{M}h$. On ramène ensuite les deux axes du barreau et du solénoïde, en coïncidence ; pour cela, on tord le fil de suspension à l'aide du bouton *m* qui

Digitized by Google

porte un index i dont l'angle de rotation est indiqué par une graduation faite sur le plateau circulaire m'. L'action du solénoïde se trouve ainsi annulée, et l'angle de torsion du fil de suspension fait connaître le produit $\mathcal{M}_b h$.

2° Mesure du rapport $\frac{\mathcal{M}_b}{h}$. — L'électro-aimant rectiligne pour lequel on vient de déterminer la valeur du produit $\mathcal{M}_b h$, étant placé en b (fig. 284) et agissant sur l'aiguille aimantée C, la dévie de sa direction primitive (277). Mais, le couple qui agit sur cette aiguille, est égal à la somme de deux autres : l'un dû au barreau de

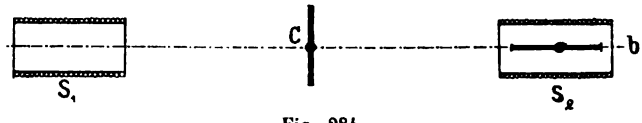

Fig. 284

fer doux seul ; l'autre au solénoïde. Pour éliminer ce dernier, on place dans le prolongement du solénoïde S_2, et de l'autre côté de l'aiguille C, un second solénoïde S_1 qui ne contient pas de fer et qui, étant parcouru par le même courant que S_2, mais en sens contraire, a pour but de détruire l'action exercée par S_2.

Pour s'assurer que les deux actions sont égales, on enlève le barreau b ; le courant étant lancé dans les deux solénoïdes, ne doit alors produire aucune action sur C. Si cette condition n'était pas remplie, on ferait varier la distance de S_1 à C jusqu'à ce qu'elle le fût. Cela fait, on remet en place le barreau b dans le solénoïde S_2, et on est alors certain que la déviation produite sur l'aiguille C est uniquement due à l'action du barreau b ; de cette déviation, on conclut le rapport $\frac{\mathcal{M}_b}{h}$.

Par une série d'artifices analogues à ceux décrits dans le n° 277, on pourrait augmenter l'amplitude des déviations sans nuire à l'exactitude des calculs. Enfin, l'emploi d'électro-aimants en forme de fer à cheval (279), est encore possible dans la méthode que nous venons d'indiquer.

Digitized by Google

NOTE V

APPLICATION DU SYSTÈME INTERNATIONAL D'UNITÉS ÉLECTRIQUES DANS LES MARCHÉS DE L'ÉTAT EN FRANCE

Un décret, en date du 2 Mai 1896, a rendu obligatoire, dans les marchés de l'État, l'emploi des unités électriques, telles qu'elles ont été adoptées en 1881 par le Congrès international d'électricité ; nous croyons devoir donner les termes mêmes du décret :

ARTICLE PREMIER. — Dans tous les marchés et contrats passés pour le compte de l'État, dans toutes les communications faites aux services publics et dans les cahiers des charges dressés par eux, le système international d'unités électriques, tel qu'il est défini ci-après, sera seul et obligatoirement employé.

ART. 2. — L'unité électrique de résistance, ou *ohm*, est la résistance offerte à un courant invariable par une colonne de mercure à la température de la glace fondante, ayant une masse de $14^{gr},4521$, une section constante et une longueur de $1^{m},063$.

ART. 3. — L'unité électrique d'intensité, ou *Ampère*, est le dixième de l'unité électro-magnétique de courant. Elle est suffisamment représentée pour les besoins de la pratique par le courant invariable qui dépose en une seconde $0^{gr},001118$ d'argent.

ART. 4. — L'unité de force électro-motrice, ou *volt*, est la force électro-motrice qui soutient le courant d'un ampère dans un conducteur dont la résistance est d'un ohm. Elle est suffisamment représentée pour les besoins de la pratique par les 0,6974 ou $\frac{1000}{1434}$ de la force électro-motrice d'un élément Latimer Clark.

Digitized by Google

Nous donnons ci-dessous les notes qui accompagnent également ce décret et qui ont trait aux règles à observer pour la définition pratique de l'ampère, et pour la préparation de l'élément Clark.

Note I. — Règles pour l'emploi de la définition pratique de l'ampère. — *Dispositions du voltamètre à argent.* — Un voltamètre mesure la quantité d'électricité qui a passé pendant la durée de l'expérience ; il fait donc connaître le courant moyen ou le courant même, si celui-ci est resté constant.

Quand on emploie le voltamètre à argent pour mesurer des courants d'environ un ampère, on doit adopter les dispositions suivantes :

La cathode sur laquelle ira se déposer l'argent sera formée d'une capsule de platine ayant au moins 10 centimètres de diamètre et 4 à 5 centimètres de hauteur.

L'anode sera une plaque d'argent pur ayant environ 30 centimètres carrés de surface et 2 à 3 millimètres d'épaisseur. Elle sera maintenue horizontalement dans le liquide, à peu de distance de la surface, par un fil d'argent rivé en son centre. Pour empêcher les fragments de métal qui s'en détachent de tomber sur la cathode, on enveloppera l'anode de papier à filtre pur replié par derrière.

Le liquide soumis à l'électrolyse consistera en une solution neutre de nitrate d'argent pur, contenant environ 15 parties en poids de nitrate pour 85 parties d'eau.

La résistance du voltamètre changeant un peu pendant l'expérience, on préviendra les variations trop considérables que pourrait éprouver le courant, au moyen d'un rhéostat intercalé dans le circuit : la somme des résistances métalliques opposées au courant ne devra pas être inférieure à 10 ohms.

Manière de faire une mesure. — La capsule de platine est lavée successivement à l'acide nitrique, à l'eau distillée et à l'alcool absolu ; elle est séchée à 160° et laissée dans un appareil à dessiccation jusqu'à complet refroidissement. Elle est alors pesée exactement.

On la remplit presque complètement de la dissolution et on la relie au reste du circuit en la plaçant sur un support en cuivre, bien propre et convenablement isolé.

Digitized by Google

On plonge alors l'anode dans la solution jusqu'à ce qu'elle soit complètement immergée ; on la fixe en place et on établit les connexions avec le reste du circuit.

On ferme le contact à l'aide d'une clef en notant le temps. On laisse passer le courant au moins une demi-heure. On note le temps au moment où l'on rompt le contact.

On vide la capsule, on lave à l'eau distillée et on laisse tremper au moins six heures.

On rince successivement à l'eau distillée et à l'alcool absolu, et on sèche dans un bain d'air à 160° ; on laisse refroidir dans un appareil à dessiccation. On pèse de nouveau. Le gain accusé par la balance fait connaître la masse d'argent déposée.

Pour avoir la moyenne du courant en ampères, on divise le nombre de grammes exprimant cette masse par le nombre de secondes pendant lequel le courant a passé et par 0,001118.

Quand on détermine par cette méthode la constante d'un instrument, on doit maintenir le courant aussi uniforme que possible et noter les indications de l'instrument à intervalles de temps rapprochés. On pourra alors tracer une courbe qui fera connaître l'indication correspondant à la valeur moyenne du courant.

Note II. — Sur la préparation de l'élément Clark [1]. — Définition de l'élément. — L'élément se compose de zinc ou d'amalgame zinc-mercure et d'une solution saturée neutre de sulfate de zinc et de sulfate mercureux dans l'eau avec excès de sulfate mercureux.

Préparation des matériaux. — 1° *Le mercure.* — Pour en assurer la pureté, le traiter par l'acide suivant la méthode habituelle, puis le distiller dans le vide.

2° *Le zinc.* — Prendre une baguette de zinc pur redistillé, souder à une extrémité un fil de cuivre, nettoyer le tout au papier de verre ou au brunissoir d'acier, en enlevant soigneusement tout fragment qui pourrait se détacher du zinc. Au moment de monter la pile, plon-

(1) D'après la spécification B de la prescription anglaise, jointe à l'ordre en conseil du 23 août 1894.

Digitized by Google

ger le zinc dans l'acide sulfurique étendu, le laver à l'eau distillée et le sécher avec un linge bien propre ou du papier à filtre.

3° *Le sulfate mercureux.* — Prendre du sulfate mercureux acheté comme pur, le mêler avec une petite quantité de mercure pur et laver le tout à fond avec de l'eau distillée froide, par agitation dans une bouteille, décanter l'eau et recommencer au moins deux fois. Après le dernier lavage, décanter aussi parfaitement que possible l'eau restante.

4° *La dissolution de sulfate de zinc.* — Préparer une dissolution saturée neutre de sulfate de zinc pur (pur recristallisé) en mêlant dans un flacon de l'eau distillée avec à peu près deux fois son poids de cristaux de sulfate de zinc pur et ajoutant une quantité d'oxyde de zinc égale à environ 2 °/₀ du poids des cristaux afin de neutraliser tout acide libre. Les cristaux seront dissous à l'aide d'une chaleur douce, la température de la solution ne devant pas dépasser 30 degrés centigrades. Du sulfate mercureux, traité comme il a été dit au paragraphe 3, sera ajouté dans la proportion d'environ 12 °/₀ du poids des cristaux de sulfate de zinc pour neutraliser l'oxyde de zinc restant libre et la solution sera filtrée pendant qu'elle est encore chaude et mise dans une bouteille de provision. Des cristaux se formeront pendant le refroidissement.

5° *La pâte de sulfate mercureux et de sulfate de zinc.* — Mêler le sulfate mercureux lavé avec la solution de sulfate de zinc, en ajoutant des cristaux de sulfate de zinc pris dans la bouteille de provision en quantité suffisante pour assurer la saturation, avec un peu de mercure pur. Remuer bien le tout de façon à en faire une pâte de la consistance de la crème. Chauffer cette pâte à une température ne dépassant pas 30 degrés centigrades, pendant une heure, en agitant de temps en temps; laisser refroidir en ayant soin de remuer encore quelquefois. Des cristaux de sulfate de zinc devront apparaître nettement visibles et répartis dans toute la masse; sinon, ajouter une plus grande quantité de cristaux pris dans la bouteille de provision et recommencer toute l'opération.

Cette méthode assure la formation d'une solution saturée de sulfate de zinc et de sulfate mercureux dans l'eau.

Digitized by Google

CONSTRUCTION DE L'ÉLÉMENT. — L'élément peut être convenablement monté dans un petit tube à essai d'environ 2 centimètres de diamètre et 4 à 5 centimètres de profondeur. Placer le mercure au fond du tube dont il remplira $0^{cm},5$. Prendre dans un bouchon entrant exactement dans le tube un morceau de $0^{cm},5$; y percer l'un à côté de l'autre deux trous, dans l'un desquels la baguette de zinc puisse y passer très juste; le deuxième trou recevra un tube de verre recouvrant un fil de platine dont il sera parlé plus loin; y faire latéralement une entaille pour la sortie de l'air quand on poussera le bouchon dans le tube. Laver le bouchon à l'eau chaude et le laisser tremper dans l'eau plusieurs heures avant de s'en servir. Enfoncer la baguette de zinc dans un trou de façon qu'elle fasse saillie d'environ 1 centimètre.

Le contact avec le mercure est constitué par un fil de platine d'à peu près $0^{m}/^{m},8$ de diamètre. Il est protégé du contact avec les autres substances de la pile par un tube en verre qui l'entoure sur toute sa longueur, sauf à ses extrémités dont l'une vient sortir au dehors et l'autre va plonger, en même temps que la partie inférieure du tube de verre, dans le mercure.

Nettoyer soigneusement le tube de verre et le fil de platine, chauffer l'extrémité inférieure du fil de platine au rouge, la plonger dans le mercure en prenant soin qu'elle soit complètement couverte.

Prendre la pâte de sulfate et la verser dans le tube à essai, en évitant de salir la paroi supérieure, de façon à former au-dessus du mercure une couche de plus de 1 centimètre.

Introduire ensuite le bouchon avec la baguette de zinc, en faisant passer le tube de verre dans le trou ménagé à cet effet. Pousser doucement le bouchon jusqu'à ce que sa surface vienne toucher le liquide. De cette façon l'air sera complètement chassé, et l'élément devra rester ainsi au moins 24 heures avant d'être scellé, ce qui pourra être fait de la façon suivante :

Chauffer de la glu marine jusqu'à ce qu'elle devienne assez fluide pour couler par son propre poids, la couler dans le tube à essai sur le bouchon en quantité suffisante pour couvrir complè-

Digitized by Google

tement le zinc et former de ce côté une soudure parfaite, d'où sort seulement le fil de cuivre soudé au zinc. Le tube de verre renfermant le fil de platine doit dépasser un peu la surface de la glu.

On peut sceller l'élément d'une façon plus définitive en recouvrant la glu marine, quand elle s'est refroidie, d'une solution de silicate de soude qu'on laisse solidifier.

L'élément ainsi construit peut être monté de telle manière qu'on le désirera. Il est bon de faire le montage de sorte que l'élément puisse être plongé dans un bain d'eau jusqu'au niveau de la partie supérieure du bouchon. La température peut alors être connue avec plus de précision que lorsqu'il est simplement dans l'air.

Dans l'emploi de l'élément, il faut éviter autant que possible les variations brusques de température.

La forme du vase contenant l'élément peut être variée. Dans la forme en H, le zinc est remplacé par un amalgame de 10 parties en poids de zinc dans 90 parties de mercure. Les autres matériaux sont préparés comme il a été dit. Les contacts sont établis, avec l'amalgame dans l'une des branches, avec le mercure dans l'autre, par des fils de platine scellés dans le verre.

Digitized by Google

NOTE VI

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DES LOIS DE LA TRANSMISSION DE L'ÉNERGIE PAR L'ÉLECTRICITÉ

On peut donner une démonstration très élégante et très simple de la possibilité de transmettre une fraction de l'énergie engendrée par une source d'électricité à une distance quelconque de cette source, en faisant simplement varier la *f. e. m.* qu'elle développe et en maintenant invariables : la quantité d'énergie produite dans l'unité de temps au départ ; la quantité restituée à l'arrivée ; le poids total des matières employées : 1° dans la source d'électricité, 2° dans la ligne, 3° dans l'appareil utilisateur d'énergie.

Ceci revient à dire que la distance à laquelle l'énergie est transmise, n'a aucune influence sur le rendement économique, ni sur le poids des matières employées dans les appareils et dans la ligne servant à cette transmission. C'est M. Marcel Deprez qui a établi pour la première fois en 1881, ce théorème qui paraît paradoxal et dont nous allons donner une démonstration d'une extrême simplicité.

Supposons que la source de *f. e. m.* soit représentée par un nombre n d'éléments de piles dont nous désignerons par e et par r la *f. e. m.* et la résistance individuelles. Supposons en outre, que chacun de ces éléments possède un circuit extérieur de résistance R, dans lequel est intercalée une résistance que nous désignons par C et qui, en s'échauffant, reproduit, sous forme d'énergie calorifique, une partie de l'énergie électrique fournie par la source dans l'unité de temps.

Les éléments de la pile étant d'abord séparés les uns des autres,

Digitized by Google

chacun d'eux engendrera dans l'unité de temps, une quantité totale d'énergie qui a pour mesure

$$w_0 = ei = (r + R + C)i^2 = \frac{e^2}{r + R + C}.$$

La quantité d'énergie w_1 transformée en chaleur dans la résistance placée à la station d'arrivée, a pour valeur

$$w_1 = Ci^2,$$

de sorte que le rendement économique a pour expression

$$\frac{w_1}{w_0} = \frac{C}{r + R + C};$$

chacun des éléments permettra donc de transmettre une certaine quantité d'énergie avec un rendement déterminé à une distance égale à la demi-longueur de la résistance R.

Groupons maintenant tous ces éléments par les pôles de même nom; juxtaposons, de façon à en former un câble de section n fois aussi grande, les n fils de la ligne sans changer leur longueur, et faisons la même opération sur les n fils des résistances C; nous obtiendrons ainsi un ensemble dans lequel la *f. e. m.* sera égale à celle d'un seul élément de la pile tandis que la résistance du groupe des n éléments sera devenue n fois moindre parce qu'ils sont accouplés en dérivation; il en sera de même pour la résistance de la ligne et pour les résistances utiles C. L'intensité totale du courant aura pour valeur

$$I = \frac{e}{\frac{r + R + C}{n}} = ni.$$

La quantité d'énergie produite par la source aura pour expression

$$W_0 = \frac{r + R + C}{n} I^2 = nw_0$$

et l'énergie W_1 développée dans la résistance utile, sera

$$W_1 = \frac{C}{n} I^2 = nw_1.$$

Ainsi, cette opération qui consiste à grouper en parallèle, les

Digitized by Google

éléments de piles, les files de lignes et les résistances utiles, permet d'ajouter les quantités d'énergie produites par les n éléments indépendants et de récupérer à la station d'arrivée les quantités d'énergie développée dans les n résistances indépendantes de l'exemple précédent; mais la distance à laquelle on transmet l'énergie reste la même de sorte que ce mode de groupement des éléments ne procure aucun avantage. Il eût même été préférable à certains égards, de laisser les n fils de lignes et les n résistances utiles indépendants les uns des autres.

Si au lieu du groupement en parallèle, nous adoptons le groupement en tension, des piles, des lignes et des résistances utiles, nous arriverons à un résultat bien différent comme nous allons le démontrer.

Les n éléments de piles étant groupés en tension, la *f. e. m.* de l'ensemble, deviendra égale à n fois e; mais tous les fils de lignes étant ajoutés en ligne droite à la suite les uns des autres, constituent une ligne nouvelle dont la longueur et la résistance deviennent n fois aussi grandes; il en est de même des n résistances utiles qui sont placées à la suite les unes des autres.

L'intensité du courant a donc pour valeur

$$\frac{ne}{n(r+\mathrm{R}+\mathrm{C})} = i,$$

elle est donc la même que dans le cas où les éléments sont isolés les uns des autres.

L'énergie produite par la source dans l'unité de temps, est égale à

$$n(r+\mathrm{R}+\mathrm{C})i^2,$$

c'est-à-dire nw_0.

De même, l'énergie développée dans les résistances utiles, a pour expression

$$n\mathrm{C} \times i^2 = nw_1$$

soit n fois l'énergie développée dans chacune des résistances lorsque les éléments de pile étaient isolés les uns des autres.

Ainsi, nous avons dépensé et récupéré les mêmes quantités d'énergie que dans l'exemple précédent, mais avec cette différence très

Digitized by Google

importante, que la transmission de l'énergie a été effectuée à travers une ligne n fois aussi grande.

On peut aller plus loin et démontrer la possibilité d'obtenir les mêmes résultats en transmettant l'énergie à une *distance quelconque*, sans changer ni le poids total des matériaux employées (piles, lignes et résistance utile), ni la quantité d'énergie engendrée au départ, ni la quantité d'énergie récupérée dans les résistances utiles, ni même la durée de fonctionnement des piles, jusqu'à leur usure complète.

Il suffit, pour cela, de supposer que la pile employée se réduit à un seul couple dont le zinc et le charbon sont composés d'un très grand nombre de petites lames indépendantes pouvant être séparées les unes des autres de manière qu'il soit possible de transformer ce couple unique en un nombre quelconque de couples plus petits que l'on réunira en tension.

La pile étant ainsi modifiée suivant la grandeur de la résistance à travers laquelle on veut transmettre l'énergie, il faudra faire subir à la ligne et à la résistance utile, une modification analogue qui consistera simplement à les étirer à la filière de manière à donner à la ligne la longueur voulue et à la résistance utile la valeur nécessaire pour que l'énergie qu'elle transforme en chaleur reste invariable. — Cette opération n'apportera d'ailleurs aucune modification à leur poids.

Un exemple numérique dégagé de l'emploi des symboles algébriques fera comprendre immédiatement ce procédé opératoire.

Supposons que le couple unique se compose de dix plaques de zinc et de dix plaques de charbon plongeant, les premières dans le compartiment négatif, et les secondes dans le compartiment positif de la pile.

Séparons-les et constituons avec ces plaques, dix couples nouveaux beaucoup plus petits dont le poids total pourra facilement être ramené à être sensiblement égal à celui du couple primitif — à la condition que chacun d'eux contienne dix fois moins de liquide — et groupons-les en tension.

Puis passons à la filière, les conducteurs de la ligne primitive ainsi que ceux qui servent à constituer la résistance utile, de façon à

Digitized by Google

réduire leur section jusqu'à ce que leur longueur soit devenue dix fois aussi grande.

Les couples nouveaux, étant composés de plaques de surface dix fois moindre que la surface collective des dix plaques du couple primitif, ont une résistance individuelle dix fois aussi grande, de sorte que leur résistance collective est égale à cent fois celle du couple primitif puisqu'ils sont groupés en tension.

De même, la résistance de la ligne ainsi que la résistance utile sont représentées par des nombres cent fois aussi grands parce que leur section est réduite au dixième tandis que leur longueur est décuple.

D'autre part, la force électro-motrice collective des dix couples groupés en tension de la nouvelle pile, est dix fois aussi grande que celle du couple primitif.

Il résulte de là que l'intensité du courant est dans le second cas dix fois moindre que dans le premier tandis que la quantité d'énergie totale mise en jeu pendant l'unité de temps dans la pile, n'a pas changé, puisque l'un des facteurs de cette énergie (la *f. e. m.*) est devenue décuple, tandis que l'autre facteur (l'intensité du courant), est devenu dix fois moindre.

L'énergie calorifique récupérée dans la résistance utile ne change pas non plus parce que cette résistance est multipliée par cent tandis que le carré de l'intensité du courant devient cent fois moindre.

Enfin la quantité de zinc dissoute, pendant l'unité de temps, dans chaque couple est, dans la seconde combinaison, dix fois moindre que la quantité correspondante au couple unique de la première combinaison. En effet, d'après les lois de Faraday, cette quantité est, dans chaque couple, proportionnelle à l'intensité du courant qui le traverse et cette intensité est, comme nous venons de le voir, réduite au dixième; mais, d'autre part, le nombre des couples est décuplé; la quantité de zinc dissoute pendant l'unité de temps dans l'ensemble, est donc la même dans les deux cas. L'usure du poids total de zinc exigera donc le même temps.

En résumé, on voit que cette décomposition d'une pile unique en un nombre quelconque d'autres pesant le même poids total,

Digitized by Google

permet de transmettre, dans l'unité de temps, une quantité d'énergie constante, à une distance quelconque, sans changer ni le poids de la ligne, ni le poids des résistances utiles, ni le poids de zinc dissous dans l'ensemble de la pile pendant l'unité de temps.

Nous avons supposé dans tout ce qui précède que l'énergie développée à l'extrémité de la ligne se présentait sous forme de chaleur, mais il est facile de constater que les conclusions auxquelles nous sommes arrivés, resteraient les mêmes si on remplaçait la résistance utile par des voltamètres à eau, de manière à obtenir l'énergie récupérée sous forme d'actions chimiques. — C'est ce que nous avons montré d'ailleurs dans un travail publié en 1881 dans *La Lumière électrique* et dans le Compte-rendu des Travaux du Congrès officiel des Électriciens.

Digitized by Google

NOTE VII

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR LES EFFORTS DÉVELOPPÉS PAR UN COURANT SOLÉNOIDAL, SUR UN CYLINDRE EN FER SOUMIS A SON ACTION.

Nous allons donner les nombres trouvés dans les expériences que nous avons faites sur différents appareils de démonstration, en vue de rechercher la meilleure forme à donner à un marteau-pilon électrique.

Plusieurs années avant les expériences que nous allons relater, vers 1882, nous avions fait construire des appareils composés de deux cylindres de fer concentriques réunis à une de leurs extrémités par une culasse en fer; par l'autre extrémité, on introduisait un solénoïde dont la couche de fil avait une épaisseur un peu moindre que l'intervalle annulaire existant entre les deux cylindres, de façon à permettre à leur ensemble, de se mouvoir librement par rapport au solénoïde. Ce système nous donna d'excellents résultats et nous permit de constater : 1° que l'effort développé par le solénoïde sur l'ensemble des deux cylindres, pendant le passage du courant, étant représenté par 100, tombait à 33 lorsque le cylindre extérieur était supprimé; 2° que la course utile de ce système, c'est-à-dire celle pendant laquelle l'effort développé restait sensiblement constant, était beaucoup plus grande avec l'enveloppe de fer que sans elle.

Nous avons ainsi obtenu facilement avec un solénoïde de 20 centimètres de diamètre intérieur, des efforts atteignant 400 kg. et une

Digitized by Google

course utile de plus de 10 c.m. Le travail calorifique produit par le passage du courant dans le solénoïde a été, dans toute l'étendue des expériences, sensiblement proportionnel à l'effort développé et sa valeur était de 6 watts par kilogramme, soulevé lorsque l'appareil possédait son enveloppe de fer, tandis qu'il était de 18 watts lorsque l'enveloppe était supprimée (1). Une des conséquences de la proportionnalité entre l'effort développé et le travail dépensé, est que cet effort est proportionnel au carré de l'intensité du courant; absolument comme lorsque l'appareil n'est pas pourvu d'enveloppe.

Ce dispositif est donc excellent pour produire économiquement de grands efforts statiques accompagnés d'une course assez considérable, mais il présentait, au point de vue de la construction, des inconvénients qui nous ont déterminé à chercher une autre disposition jouissant des mêmes avantages, bien que ne possédant pas d'enveloppe.

La nouvelle disposition que nous allons décrire, et que nous avons essayée à Creil à la fin de 1888, est représentée par les figures 285, 286, 287.

Elle consiste en une série de noyaux de fer de section carrée ou rectangulaire, réunis à une de leurs extrémités par une culasse unique. Dans l'appareil représenté sur la figure 287, les noyaux sont au nombre de quatre; ils sont parallèles, équidistants et entourés de solénoïdes dans lesquels ils peuvent glisser sans frottement appréciable. Les solénoïdes sont groupés en tension et de telle façon que les pôles situés sur une même diagonale du carré formé par la culasse, soient de même nom, tandis que les pôles situés sur un même côté de ce carré sont de noms contraires. Il résulte de là, que la culasse est à l'état neutre et qu'il existe entre les huit faces internes des quatre noyaux quatre champs magnétiques très intenses. Aussi, un appareil composé de quatre noyaux carrés de 15 c.m. de côté, et dont les faces parallèles internes étaient espacées de 10^{cm}, a-t-il permis de

(1) Nous avons donné au quotient du travail calorifique développé dans un système électro-magnétique par l'effort exercé entre les pièces fixes et mobiles, le nom de : *prix de l'effort statique*. Nous verrons plus tard que c'est un élément important de la théorie des machines dynamo-électriques.

Digitized by Google

développer des efforts atteignant 1 000 kgr. avec une dépense d'énergie calorifique de 5 watts,45 par kilogramme d'effort. Le *prix de l'effort statique* est resté constant dans les limites les plus étendues.

Pour bien démontrer la cause de l'efficacité de ce dispositif, nous avons fait construire trois modèles. Le premier était composé d'un seul noyau de section carrée (fig. 285) de 5^{cm} de côté, il était muni d'une culasse carrée de 6^{cm} de côté et de 2^{cm},5 d'épaisseur.

Le second modèle (fig. 286) était composé de deux noyaux de section

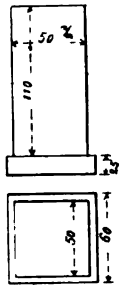

Fig. 285.

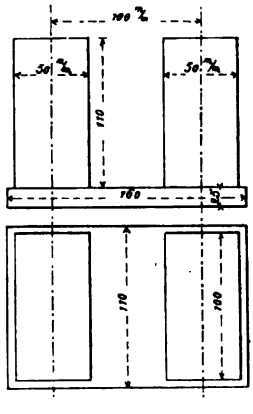

Fig. 286.

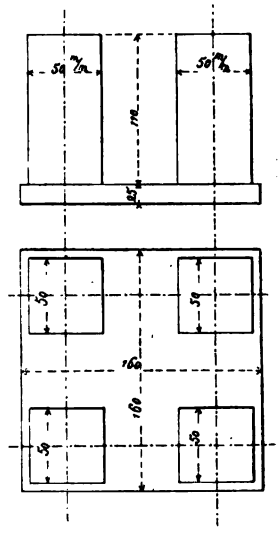

Fig. 287.

rectangulaire, chaque noyau pouvant être considéré comme résultant de la juxtaposition de deux noyaux identiques à ceux de l'appareil précédent, la culasse conservant l'épaisseur de 2^{cm},5.

Le troisième modèle (fig. 287) se composait de quatre noyaux identiques au noyau du premier modèle et dont les faces internes étaient séparées par un intervalle de 5^{cm}.

Les solénoïdes de ces trois modèles étaient identiques entre eux en ce qui concerne le nombre de spires, la longueur et l'épaisseur de la couche de fil, et le diamètre de ce dernier.

Les trois appareils étaient placés en tension dans le même circuit,

Digitized by Google

parcourus, par conséquent, par le même courant ; et l'effort exercé par chacun d'eux était mesuré par une balance à ressort.

Le tableau ci-dessous contient les résultats obtenus avec les trois appareils.

TABLEAU COMPARATIF DES ESSAIS FAITS SUR LES TROIS APPAREILS

Nos des expériences	Intensité du courant en Ampères	EFFORT EN KILOGRAMMES			DONNÉES GÉNÉRALES					
						POIDS			Nombre de spires	Résistance
		Appareil à 4 pôles	Appareil à 2 pôles	Appareil à 1 pôle	Appareils	Ames en fer	Culasse	Fil de cuivre		
1	4	0.800	0.600	0.200	4 pôles	4 × 2k,145 = 8k,58	5 kilogr.	6k,200 gr.	560	0m,650 en tension
2	6	1.400	0.900	0.300						
3	8	2.800	1.700	0.360						
4	10	4.200	2.700	0.500						
5	12	6.000	4.000	0.700						
6	14	8.050	5.200	0.890						
7	16	10.050	6.700	1.100						
8	18	13.000	8.500	1.400						
9	20	15.500	10.500	1.700	2 pôles	4k,29 × 2 = 8k,58	3k,276	4k,470		0m,488
10	22	19.000	12.800	2.050						
11	24	22.500	15.000	2.200						
12	26	26.500	17.800	2.800						
13	28	30.600	21.000	3.300						
14	30	35.500	23.600	3.800						
15	32	40.700	27.000	4.200						
16	34	46.000	30.000	4.720						
17	36	51.000	33.000	5.200						
18	38	54.600	36.700	5.800						
19	40	62.500	41.000	6.300	1 pôle	2k,145	708 gr.	1k,390	140	0m,1625
20	42	68.000	44.300	7.000						
21	44	72.000	48.800	7.900						
22	46	79.000	53.000	8.400						
23	48	85.000	57.600	9.000						
24	50	90.000	62.200	9.800						
25	52		67.500	10.500						
26	54		72.400	11.400						
27	56		77.600	12.100						
28	58		82.600	12.900						
29	60		88.000	13.800						

On peut représenter par des courbes, les résultats consignés dans

Digitized by Google

ce tableau, en portant les intensités sur l'axe des abscisses et les efforts correspondants sur l'axe des ordonnées.

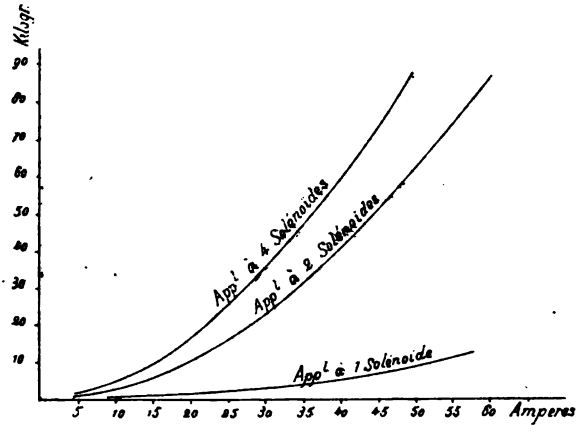

Fig. 288.

La figure 288 représente les courbes ainsi obtenues avec les trois appareils.

Digitized by Google

NOTE VIII

EXPÉRIENCES SUR LA RELATION QUI EXISTE ENTRE LE FLUX DE FORCE MAGNÉTIQUE D'UN ÉLECTRO-AIMANT, ET L'INTENSITÉ DE LA FORCE MAGNÉTISANTE.

Ces expériences ont été faites au moyen d'électro-aimants dont les diamètres des noyaux ont varié de 6 centimètres jusqu'à 25 centimètres.

Les tableaux ci-après se rapportent aux expériences faites avec un électro-aimant dont les noyaux avaient 6 centimètres.

Méthode employée. — L'intensité du champ magnétique produit entre les deux pièces polaires de l'électro-aimant, se déduit de la mesure de l'effort mécanique exercé sur un fil placé dans le champ et parcouru par un courant d'intensité connue.

Nous avons vu que si l'on désigne par L la longueur du fil, comptée perpendiculairement à la direction des lignes de force ; par I l'intensité du courant qui traverse ce fil ; par $\mathfrak{B}$ l'intensité du champ magnétique, et par F la force totale appliquée au fil, en supposant qu'il ne puisse prendre qu'un mouvement de translation dont la direction est perpendiculaire au plan formé par les lignes de force et la direction du fil, on a l'équation

$$F = \mathfrak{B}LI,$$

dans laquelle F est exprimée en dynes, $\mathfrak{B}$ en unités magnétiques C. G. S., L en centimètres, I en dizaines d'ampères.

Digitized by Google

Si l'on veut exprimer F en grammes, L en mètres, et I en ampères, l'équation résolue par rapport à $\mathcal{H}$ devient

$$\mathcal{H} = 98{,}1 \frac{F}{LI}.$$

Description de l'appareil. — Dans la pratique, il serait impossible de donner à la valeur L du fil, une valeur considérable ; on tourne la difficulté en enroulant le fil sur un cadre rectangulaire, mobile autour d'un axe perpendiculaire aux lignes de force, et qui divise le cadre en deux parties égales.

Le fil enroulé sur ce cadre, forme un grand nombre de spires et il en résulte que les cotés du cadre perpendiculaires aux lignes de force ne peuvent être assimilés à un fil unique, que si l'on a soin de considérer toutes les spires comme réduites à une seule située à une distance de l'axe de rotation égale à la moyenne arithmétique des distances des spires extrêmes.

Dans ce cas, la longueur que nous avons appelée L, est égale au nombre de spires multiplié par deux fois le côté parallèle à l'axe, de la spire moyenne. La force a pour mesure le produit de l'effort lu

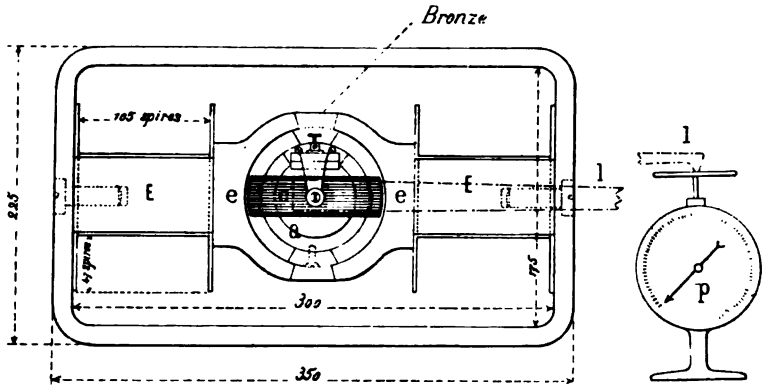

Fig. 289.

sur la balance à ressort, par le rapport du bras de levier qui agit sur la balance, à la distance de l'axe à la spire moyenne.

L'appareil employé se compose (fig. 289) d'un cadre c, rectangulaire et recouvert de fil, mobile autour de son axe, dans un champ

Digitized by Google

magnétique créé par un électro-aimant EE muni d'épanouissements polaires cylindriques ee entre lesquels est placé un cylindre *a* en fer doux, intérieur au cadre *c* et concentrique aux pièces polaires.

Sous l'action du courant qui le traverse, le cadre va être légèrement dévié de sa position horizontale ; on mesure l'effort qui produit cette déviation à l'aide d'une balance à ressort dont le plateau ne se déplace que de 1 centimètre pour un effort de 1 kilogramme. Le cadre agit sur la balance par l'intermédiaire d'un levier très long *ll* soudé perpendiculairement à l'axe du cadre et situé dans le même plan.

En faisant passer des courants d'intensité croissante d'une expérience à l'autre dans le circuit inducteur, et un courant d'intensité fixe dans le cadre mobile, on obtient des efforts croissants correspondants à des champs croissants dans l'entrefer, mais cet accroissement n'est pas proportionnel à l'accroissement du courant qui excite l'électro-aimant.

Les résultats des différentes expériences auxquelles nous nous sommes livrés, sont consignés dans le tableau ci-après ; dans ces expériences, l'intensité du courant dans le cadre est de 0ᴬ,152.

DONNÉES DE CONSTRUCTION DE L'APPAREIL

Electro-aimants.

Longueur du noyau de fer	84m/m
Diamètre » »	60m/m
Diamètre d'alésage des pièces polaires	97m/m
Diamètre extérieur du tube de fer intérieur au cadre.	80m/m
Longueur du tube de fer intérieur au cadre	80m/m
Nombre de spires de fil par branche	4935
Résistance d'une branche	121 ohms.

Cadre.

Nombre de spires du cadre	2470
Longueur totale du fil enroulé sur le cadre	919m,50
Longueur du fil actif (L)	384m

Digitized by Google

TABLEAU DES EXPÉRIENCES FAITES LE 27 FÉVRIER 1889.

Nos des expériences	Intensité dans le fil de l'électro-aimant	Effort sur le peson à l'extrémité d'un levier de 30cm	Intensité dans le cadre	Champ moyen dans l'entrefer		Flux par cm² dans les noyaux
				en grammes par mètre-ampère	en unités C. G. S.	
		gr.				
1	0,02145	14		1,58	155	482
2	0,03035	20,50		2,31	227	765
3	0,03755	27		3,05	299	930
4	0,04465	32		3,61	354	1100
5	0,05350	39		4,40	431	1342
6	0,05900	44	0,152	4,96	486	1513
7	0,06250	46		5,19	509	1584
8	0,12150	86		9,70	931	2960
9	0,19000	126		14,2	1393	4330
10	0.25200	160		18,05	1770	5510
11	0,31800	197		22,2	2080	6770
12	0,37500	213		24	2350	7320
		gr.				
13	0,29200	181		20,4	2000	6230
14	0,29650	185		20,9	2050	6380
15	0,36650	215		24,2	2376	7385
16	0,43600	227		25,6	2510	7810
17	0,49750	238		26,85	2630	8200
18	0,51500	240		27,1	2660	8270
19	0,57500	247	0,152	27,85	2740	8500
20	0,61000	249		28,1	2750	8570
21	0,68000	258		29,1	2850	8890
22	0,71500	264		29,8	2920	9030
24	0,73500	267		30,1	2950	9190
25	0,89000	276		31,1	3050	9500
26	0,94000	280		31,6	3100	9640
27	1,06000	284		32,0	3140	9700

Il est très intéressant de comparer la valeur du champ magnétique dans l'entrefer, telle qu'elle est donnée par ces expériences, à celle que donne la formule du numéro 429

$$\mathcal{H} = \frac{4\pi NI}{\delta},$$

dans laquelle N représente le nombre total de spires contenu dans l'ensemble des deux solénoïdes ; δ, l'entrefer total, c'est-à-dire la différence du diamètre d'alésage des pièces polaires et du diamètre extérieur du cylindre de fer intérieur au cadre.

Nous savons que cette formule n'est applicable que quand la per-

Digitized by Google

méabilité du fer est très grande et que la section des noyaux de fer est également grande par rapport à leur longueur. Or, ces conditions sont remplies tant que le flux par centimètre carré ne dépasse pas 6000 unités.

Prenons comme exemple l'expérience n° 13 dans laquelle on avait

$$I = 0{,}292.$$

On a vu plus haut que le nombre de spires par branche était de 4935 ; donc

$$N = 4935 \times 2 = 9870.$$

Quant à la valeur de δ, elle était égale à $17^{m}/^{m}$ soit $1^{cm},7$.

La valeur calculée de $\mathcal{H}$ est donc

$$\frac{4 \times 3{,}14 \times 9870}{1{,}7} \times I = 7300.I,$$

I étant exprimé en Ampère. Si on fait

$$I = 0{,}292,$$

il vient

$$\mathcal{H} = 7300 \times 0.392 = 2130,$$

tandis que l'intensité donnée par l'expérience n° 13, est égale à 2000. L'erreur relative est un peu supérieure à 5 °/₀ ; résultat très satisfaisant si l'on considère la multiplicité des éléments mal connus qui entrent dans ce problème et les hypothèses que l'on a été obligé de faire pour le rendre accessible au calcul.

Lorsque le flux dans les noyaux de fer dépasse notablement 6000 unités par centimètre carré, la perméabilité diminue rapidement ; il n'est plus alors permis de négliger la réluctance du fer et l'on ne peut plus appliquer la formule que nous venons d'employer, ainsi qu'il est facile de s'en assurer. La conclusion à tirer de ces expériences est que l'on peut considérer le flux de force à l'intérieur du fer, comme sensiblement proportionnel à la force magnéto-motrice $4\pi NI$, tant que ce flux est inférieur à 6000 unités par centimètre carré.

La figure 290 représente, sous forme de courbe, les résultats du tableau précédent. La courbe qui porte l'indication *première expérience*, correspond aux résultats obtenus lorsque l'intensité du cou-

Digitized by Google

rant dans le cadre mobile était de 0ᴬ,152. La courbe portant l'indication *deuxième expérience*, se rapporte aux résultats obtenus lorsque l'intensité était de 0ᴬ,182; ces derniers résultats ne sont pas consi-

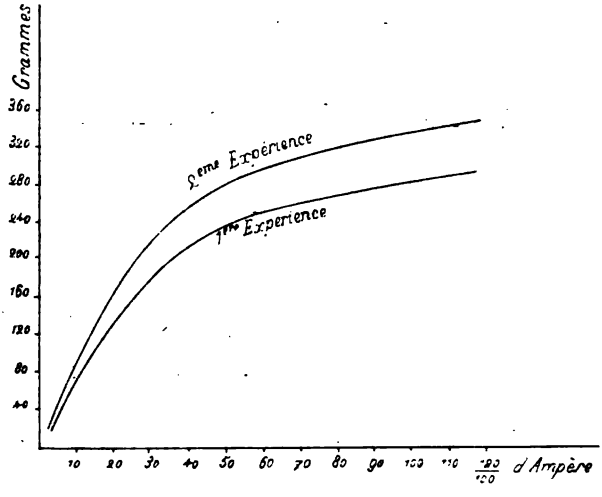

Fig. 290.

gnés sur le tableau. Les abscisses sont proportionnelles aux intensités exprimées en centièmes d'ampères et les ordonnées représentent les efforts (exprimés en grammes) exercés à l'extrémité du bras de levier de 30 centimètres.

Digitized by Google

NOTE IX

CHAMPS MAGNÉTIQUES TOURNANTS

C'est en 1883 que M. Marcel Deprez a fait breveter, pour la première fois, le dispositif qui permet d'obtenir les mêmes résultats que l'anneau Pacinotti, sans employer ni le sectionnement, ni le collecteur, ni les balais. C'est à lui qu'appartient l'idée de remplacer l'action uniforme d'un courant traversant un cadre, au centre duquel est placé un disque en fer doux, par celle de deux courants d'intensité différente traversant deux cadres rectangulaires entre eux (fig. 231), de façon qu'on puisse considérer la direction de l'aimantation produite dans le disque, comme dépendant uniquement du *rapport des intensités des deux courants*. Dès 1881, il avait réalisé dans les ateliers de M. Carpentier, un moteur électrique dont la pièce mobile était ainsi composée d'un disque en fer doux recouvert de deux enroulements rectangulaires entre eux et solidaires du disque. Ce disque, mobile autour d'un axe horizontal, était placé entre les branches d'un aimant en fer à cheval, de façon que l'axe de rotation fût perpendiculaire à la direction des lignes de force.

En lançant dans chacun des enroulements un courant distinct emprunté à une pile, on pouvait, en renversant simplement le sens du courant, créer quatre combinaisons différentes auxquelles correspondaient quatre directions de la ligne des pôles du disque, le courant ayant, dans tous les cas, la même intensité dans les deux enroulements. Ce nombre de combinaisons pouvait être porté à huit, en supprimant à certains moments le passage du courant, soit dans

Digitized by Google

l'un, soit dans l'autre des enroulements. A chacune de ces combinaisons correspondait une direction particulière de la résultante des actions magnétiques des deux cadres, et par conséquent, une position particulière d'équilibre du disque dans le champ magnétique. Ces combinaisons étaient réalisées au moyen de deux commutateurs à inversion (fig. 250) auxquels on imprimait un mouvement de rotation qui avait pour conséquence un mouvement angulaire identique de la ligne des pôles dans le disque en fer doux. Cette ligne pôlaire, tendant à se mettre toujours dans la direction des lignes de forces de l'aimant, il en résultait que le disque tournait d'angles égaux à ceux dont on faisait tourner le double commutateur d'inversion. M. M. Deprez put obtenir ainsi la reproduction complète en grandeur et en direction du mouvement angulaire d'un arbre tournant placé à une distance quelconque de l'ensemble des commutateurs.

Mais ce système ne pouvait reproduire le mouvement que par fractions indivisibles de 45 degrés ; pour obtenir une reproduction exacte du mouvement de rotation de l'arbre des commutateurs, il aurait fallu faire varier l'intensité de chacun des deux courants d'une façon continue, ce qui aurait exigé l'emploi de deux rhéostats d'une réalisation assez difficile. Il était beaucoup plus simple d'engendrer les deux courants au moyen d'une source à force électromotrice variable, telle qu'une bobine tournant dans un champ magnétique.

L'appareil de synchronisme à champ magnétique tournant, se trouva donc composé : 1° d'une double source de force électromotrice formée de deux bobines indépendantes, rectangulaires entre elles, et tournant dans le même champ magnétique produit par un aimant permanent ; 2° du disque de fer doux recouvert de deux enroulements rectangulaires, décrit plus haut. Chacune des bobines communique d'une façon permanente avec un des enroulements du disque, de sorte que lorsqu'on met les deux bobines en mouvement, elles engendrent des courants sinusoïdaux déphasés de 90° qui font naître, dans le disque en fer, une aimantation dont l'intensité est constante, mais dont la direction se déplace avec la même vitesse

Digitized by Google

angulaire que les bobines et d'une façon absolument continue comme nous l'avons démontré (432).

Il est évident d'ailleurs que le système des deux bobines génératrices du courant peut recevoir une forme identique à celle du disque récepteur à double enroulement, et le système se réduit ainsi à deux appareils identiques placés aux extrémités d'un même circuit ; de telle sorte que si l'on met l'un des deux en mouvement, l'autre prend un mouvement identique.

M. Deprez montra que l'on pouvait également produire un champ magnétique tournant dans un anneau de fer entouré de fil comme l'anneau Pacinotti, sans avoir recours au sectionnement, et sans employer ni collecteur, ni balais. La première application qu'il fit de cette seconde disposition, fut décrite dans un brevet en date du 22 juillet 1882, sous le nom de *Comparateurs des courants électriques.* Nous donnons ci-dessous la description succincte de ce brevet telle qu'elle a été publiée par M. Marcel Deprez dans la notice qu'il a fait paraître en 1883 sur ses titres scientifiques.

Comparateurs des courants électriques [1].

(Brevets, juillet 1882.)

M. Marcel Deprez a imaginé un certain nombre de dispositifs permettant de comparer l'intensité de deux courants. Il n'est pas utile de les détailler tous : nous citerons comme principe, une bobine suspendue entre quatre pôles d'aimant dont les actions concourent à augmenter le déplacement, ou deux cadres rectangulaires solidaires également placés devant les pôles d'aimant. Le dispositif auquel M. Deprez s'arrête de préférence est à circuit fixe. Il se compose essentiellement de deux circuits distincts enroulés côte à côte sur un même anneau de fer. *L'un d'eux reçoit un courant par les extrémités d'un diamètre, l'autre par les extrémités du diamètre perpendiculaire ; l'anneau est alors soumis à deux tendances magnétisantes rectangulaires entre elles, et son magnétisme définitif sera produit par la résultante de ces deux actions* ; une aiguille aimantée, suspendue au centre de l'anneau, donnera la direction de cette résultante et par conséquent le rapport des intensités passant dans les deux circuits.

(1) Notice sur les travaux scientifiques de M. Marcel Deprez, page 36. Gauthier-Villars, éditeurs, Paris, 1883.

Digitized by Google

Une autre application du champ magnétique tournant, a été l'objet d'une prise de brevet de la part de M. Deprez en mai 1883 ; elle est également décrite d'une façon succincte dans la notice précédemment citée (pages 43 et 44). Cette description a cela d'intéressant que l'auteur s'est efforcé de bien faire comprendre ce qu'il entendait par « un champ magnétique tournant » et que, après avoir pris comme type du genre. l'anneau Pacinotti dans lequel le champ tournant est obtenu par des procédés mécaniques, il montre que le même résultat peut être obtenu sans l'emploi d'aucune pièce mobile, au moyen de deux enroulements distincts dans lesquels on lance des courants dont les intensités sont dans un rapport variable avec la direction que l'on veut assigner aux lignes de force du champ.

Le brevet auquel nous faisons allusion avait été pris sous le titre de *Régulateur du champ magnétique* ; voici la reproduction du passage de la notice qui concerne ce brevet.

Régulateur du champ magnétique.

(Brevets, 10 mai, 22 mai 1883.)

Imaginons les enroulements du fil inducteur divisés en sections et aboutissant à un collecteur à lames analogue à celui d'une machine de Gramme ; on sera libre de faire pénétrer le courant magnétisant, par le point qu'on voudra. S'il entre, ainsi qu'il a été dit, par le plan médian, les pôles seront dans ce plan ; le champ inducteur sera maximum. En faisant tourner surle collecteur, un couple de frotteurs qui amenait le courant, on le fera pénétrer par un autre point ; les pôles du champ s'y transporteront : ils cesseront de se trouver dans les pièces inductrices ; le champ actif sera amoindri ; lorsque le plan des pôles aura tourné d'un quadrant, les pièces inductrices seront dans la ligne neutre, le champ actif sera nul ; en continuant le mouvement, il reprendra progressivement son action, mais en sens inverse, diminuera de nouveau et ainsi de suite. On est donc complètement maître du champ magnétique, et cela sans jamais rompre le courant et sans faire varier la résistance du circuit, conditions extrêmement importantes.

Ces dispositions ayant été appliquées à une machine, ont permis, par une rotation d'un quadrant, imprimée au régulateur du champ magnétique, de faire varier la force électro-motrice de 700 volts à 0 et, par une coïncidence intéressante, à vitesse constante, la variation de la force

Digitized by Google

électro-motrice a été trouvée proportionnelle à l'angle de rotation du régulateur.

Cette rotation du champ magnétique peut être obtenue sans faire mouvoir aucune pièce ; pour cela, on fera naître le champ à l'aide de deux courants dont les points d'entrée sont sur deux diamètres perpendiculaires ; l'aimantation de ce champ sera alors une résultante dont la position dépend des intensités relatives des deux courants, ainsi que cela a été décrit ci-dessus pour le comparateur des courants ; il suffit de faire varier le rapport de ces intensités pour faire tourner cette résultante et avec elle le champ magnétique.

Digitized by Google

NOTE X

MARTEAU-PILON ÉLECTRIQUE SYSTÈME MARCEL DEPREZ

Comme application du principe du sectionnement (434) nous donnerons la description du marteau-pilon électrique système Marcel Deprez.

Cet appareil, représenté schématiquement sur la figure 291, se compose d'une série de galettes $gg' \ldots g''$ disposées autour d'un cylindre de laiton d'une longueur au moins égale à la course maximum du marteau et servant de guide à la masse de fer N constituant ce marteau qui vient frapper sur l'enclume E.

Chaque galette, formée d'une vingtaine de spires, est reliée aux bobines voisines de la même façon que les bobines d'un anneau Pacinotti, c'est-à-dire que l'extrémité du fil par laquelle le courant entre dans l'une d'elles est soudée à l'extrémité du fil par laquelle le courant sort de la galette précédente. Chaque soudure est reliée à une lame d'un collecteur CC′ formé de touches isolées les unes des autres.

Le courant entre par un balai B et sort par un balai B′ après avoir parcouru un nombre de galettes égal au nombre de touches du collecteur comprises entre les deux balais ; si on déplace l'ensemble de deux balais maintenus à une distance constante, le nombre de galettes parcourues par le courant restera invariable, mais le solénoïde formé par la réunion de toutes ces galettes rendues actives par le passage du courant, se déplacera dans l'espace d'une quantité proportionnelle au déplacement des balais.

Digitized by Google

Il se comportera donc absolument comme le ferait un solénoïde de longueur constante que l'on ferait monter ou descendre le long du tube de cuivre qui sert de guide au marteau. Il résulte de là que si le solénoïde formé par la réunion de toutes les galettes actives,

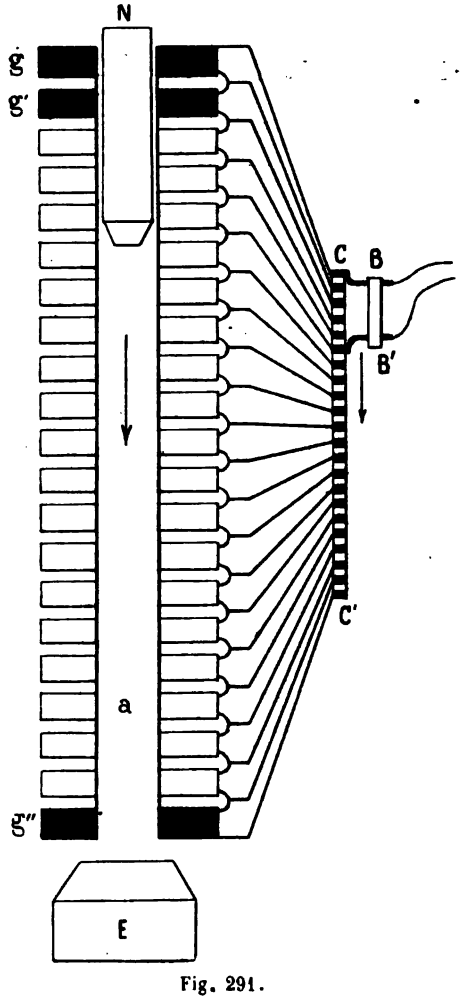

Fig. 291.

exerce sur le marteau N, une attraction suffisante pour le maintenir suspendu dans l'espace, ce marteau montera ou descendra proportionnellement au déplacement de l'ensemble des balais. On aura donc ainsi réalisé un véritable servo-moteur électrique.

Digitized by Google

Dans le modèle construit en 1882, les sections élémentaires étaient au nombre de 80, formant une hauteur totale de 1 mètre, le cylindre en fer doux avait 10^{cm} de diamètre, 40^{cm} de longueur et pesait 23 kilogrammes. Lorsque le courant avait une intensité de 23 ampères et qu'il traversait 15 sections, l'effort développé pouvait atteindre 70 kilogrammes, c'est-à-dire trois fois le poids du marteau ; aussi obéissait-il avec une docilité absolue aux mouvements de la main de l'opérateur.

Le professeur américain Page, a fait autrefois des expériences intéressantes avec un appareil analogue au marteau-pilon de M. Marcel Deprez.

Il consistait en une série de bobines superposées, dans chacune desquelles le courant était lancé successivement, de sorte que le morceau de fer placé à l'intérieur de cette série de bobines, pouvait s'élever à une hauteur proportionnelle au nombre des bobines employées. Mais il y avait, entre l'appareil du professeur Page et celui que nous venons de décrire, une différence importante qui consistait en ce que le courant ne traversait qu'une bobine à la fois, cette bobine ayant une dimension égale à la somme des bobines partielles de l'appareil de M. Deprez. Il en résultait que, au moment du passage du courant d'une bobine dans l'autre, de violentes étincelles éclataient entre les lames et les balais du commutateur.

L'appareil du Professeur Page, n'était donc pas comme l'appareil de M. Deprez, une application du principe du sectionnement.

Digitized by Google

NOTE XI

PRODUCTION D'UN TRAVAIL MÉCANIQUE AU MOYEN D'UN ÉLECTRO-AIMANT A PÔLES TOURNANTS, DONT L'INTENSITÉ D'AIMANTATION RESTE CONSTANTE

Pour montrer la fécondité du principe du sectionnement, nous allons donner la description d'un électro-aimant qui peut exercer, sur une armature en fer placée dans son voisinage, une attraction considérable que l'on peut annuler à volonté sans changer le moment magnétique, ni par conséquent l'énergie potentielle de l'électro-aimant. Il en résulte que si l'armature en fer est libre de se mouvoir, à la condition toutefois de développer un travail mécanique extérieur, tel que l'allongement d'un ressort ou le soulèvement d'un poids, ce système constituera un véritable moteur électrique basé sur l'utilisation de l'attraction exercée par un électro-aimant sur une masse de fer. C'est cette propriété qui, pendant un grand nombre d'années, a été exclusivement appliquée dans tous les essais de moteurs électriques avant l'invention de l'anneau Pacinotti, mais il en résultait une perte considérable d'énergie due à la désaimantation du noyau de fer de l'électro-aimant, ainsi que des phénomènes destructeurs qui en sont la conséquence (étincelle d'extra-courant). En outre, l'aimantation et la désaimantation étant d'autant plus lentes que les dimensions de l'électro-aimant sont plus considérables, le nombre des oscillations utiles de l'armature diminuait très rapidement quand on augmentait les dimensions de l'électro-aimant.

Digitized by Google

Dans le dispositif que nous allons décrire, ces inconvénients ont été complètement évités.

Supposons que sur un octogone régulier en fer, *abcd* (fig. 292), on enroule quatre solénoïdes S_1, S_2, S_3, S_4 composés de sections reliées entre elles comme dans l'anneau Pacinotti, mais réparties en quatre groupes égaux de façon que quatre des côtés de l'octogone soient recouverts de fil de deux en deux, tandis que les quatre autres côtés sont nus. Le groupement des sections constituant les solénoïdes, est

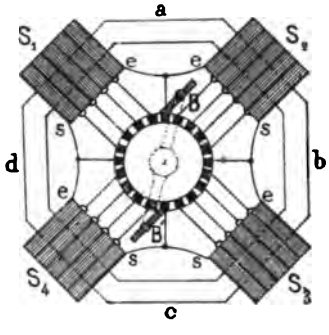

Fig. 292.

effectué exactement comme il le serait dans un anneau Pacinotti ne présentant aucune solution de continuité, et chacune des jonctions des fils de deux sections consécutives est reliée à une lame d'un collecteur fixe, comme on le voit sur la figure. Le courant qui anime l'appareil, est amené par deux balais, B, B′, dont l'ensemble peut tourner autour du centre du collecteur.

Supposons ces balais placés d'abord de façon que la droite qui joint leurs points de contact avec le collecteur, passe par les milieux des côtés *a* et *c* de l'octogone ; nous savons que le passage du courant déterminera en chacun de ces points la production d'un pôle *conséquent* qui sera par exemple austral en *a* et boréal en *c*, tandis que les milieux des côtés *b* et *d* ne présenteront pas de trace d'aimantation. Faisons maintenant tourner les balais d'un quart de tour dans le sens *abcd* ; le double pôle austral de l'octogone apparaîtra en *b* et le double pôle boréal en *d*, tandis que les points *a* et *c* ne présenteront plus de trace d'aimantation.

Digitized by Google

Un second quart de tour imprimé aux balais dans le même sens, aurait pour effet de transporter le double pôle austral en c et le double pôle boréal en a, c'est-à-dire de renverser le sens de l'aimantation primitive, les points b et d redevenant neutres.

Il est évident que ce déplacement des pôles suivant le périmètre de l'octogone aurait encore lieu si les côtés a, b, c, d, au lieu d'être dans le même plan, étaient placés dans des plans différents, à la condition, bien entendu, qu'ils soient en contact intime par leurs extré-

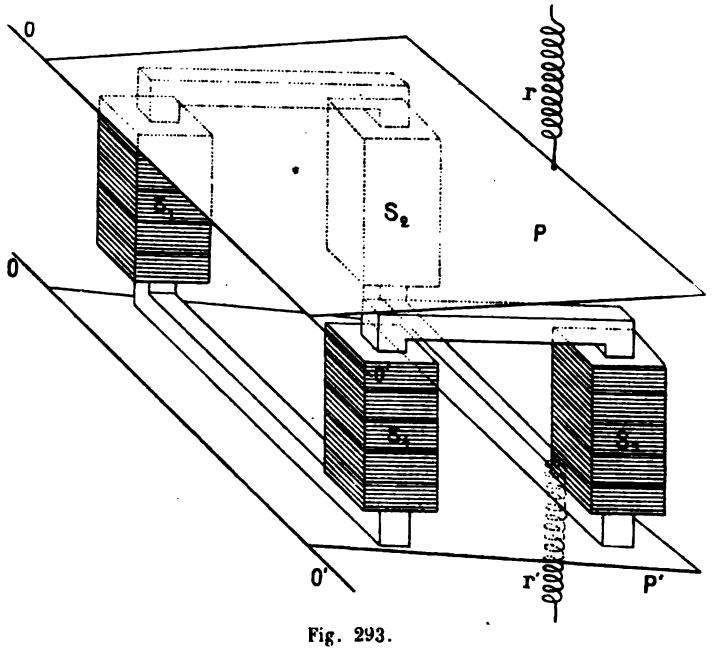

Fig. 293.

mités, de façon qu'il n'existe entre eux aucune solution de continuité.

Nous pouvons, en mettant cette remarque à profit, déformer complètement le système sans changer ses propriétés magnétiques et lui donner la disposition représentée par la figure 293, dans laquelle les quatre côtés de l'octogone recouvert de fil, $S_1S_2S_3S_4$, sont devenus verticaux, tandis que les quatre autres côtés sont répartis entre deux plans horizontaux, de sorte que la projection horizontale de cet ensemble se réduit à un carré.

Digitized by Google

Supposons maintenant que, à proximité des portions non recouvertes de fil, on ait placé deux plaques de fer horizontales P et P′ de forme carrée susceptibles d'un mouvement limité perpendiculairement à leur plan et soumises à l'action de ressorts r et r' agissant en sens contraire de l'attraction magnétique.

Si on lance le courant dans l'appareil, et si on fait tourner les balais, non représentés sur la figure, les deux pôles extrêmes du système se déplaceront dans l'intérieur du fer, de telle façon que, pour une certaine position des balais, ces pôles seront situés dans un plan parallèle à la plaque P sur laquelle ils exerceront une attraction suffisante pour vaincre l'action du ressort r, tandis que, au même moment, les côtés horizontaux inférieurs seront à l'état neutre. Si on fait faire un quart de tour aux balais, les rôles seront intervertis ; les côtés horizontaux inférieurs deviendront le siège des pôles et attireront la plaque P′, tandis que les côtés supérieurs reviendront à l'état neutre et laisseront la plaque P obéir librement à l'action du ressort r.

Chacune des plaques mobiles exécutera donc deux oscillations complètes pour un tour entier des balais, mais leurs mouvements ne seront pas concordants et l'intervalle de temps qui s'écoulera entre eux sera égal au quart du temps nécessaire pour accomplir une rotation des balais.

L'appareil que nous venons de décrire a été construit à Creil en 1888 ; la tension de chaque ressort était de 100 kg.; le diamètre des noyaux de fer cylindriques recouverts de fil, était de 6 c.m.; les côtés horizontaux non recouverts de fil, de section carrée, avaient 6 c.m. de côté. En lançant un courant de 20 ampères environ, on déterminait, par une rotation rapide des balais, une série d'oscillations des deux plaques de fer, sans aucune production d'étincelles. Le mouvement des plaques de fer était accompagné d'un bruit considérable qui indiquait que la force vive de ces plaques, au moment du choc contre leurs arrêts, eût été suffisante pour produire des effets utilisables industriellement, tels que forgeages de clous, etc.

Il est évident que le champ magnétique tournant, produit grâce à l'emploi du sectionnement, aurait pu l'être comme nous l'avons

Digitized by Google

démontré, au moyen de deux courants alternatifs déphasés d'un quart de période, traversant, le premier, les solénoïdes S_1 et S_3, le second, les solénoïdes S_2 et S_4. On aurait ainsi supprimé le sectionnement, le collecteur et les balais ; mais le rythme du mouvement des plaques P et P′ n'aurait plus été arbitraire puisqu'il aurait été absolument dépendant de la fréquence des courants alternatifs employés.

Digitized by Google

NOTE XII

EFFORTS MÉCANIQUES DÉVELOPPÉS PAR L'ACTION MUTUELLE DE DEUX SOLÉNOIDES

On sait combien sont faibles les actions mécaniques mutuelles de deux circuits voisins parcourus par le même courant. On peut cependant, en leur donnant la forme de solénoïdes de grand diamètre et de faible épaisseur, obtenir des effets mécaniques d'une remarquable intensité.

Nous allons décrire quelques expériences que nous avons faites à cet égard et qui présentent un certain intérêt parce qu'elles permettent de prévoir, à coup sûr, quels efforts on pourrait obtenir avec des solénoïdes géométriquement semblables à ceux que nous avons expérimentés, puisque nous avons démontré que ces efforts sont proportionnels à la quatrième puissance du rapport de similitude, la densité du courant étant, bien entendu, la même (théorème des similitudes).

Disposition des expériences. — Les solénoïdes à expérimenter A et A′ (fig. 294) étaient placés très près l'un de l'autre, mais non en contact. Le solénoïde supérieur A était fixé à une table percée d'une ouverture circulaire, le solénoïde inférieur A′ était suspendu à un peson à ressort capable de mesurer des efforts s'élevant jusqu'à 100 kilogrammes. Le courant était lancé en sens contraire dans les deux solénoïdes, de sorte que les efforts développés étaient répulsifs.

Les résultats obtenus avec ce dispositif furent peu réguliers à

Digitized by Google

cause de l'imperfection du mode de suspension du solénoïde inférieur ; c'est pourquoi on le remplaça par le dispositif représenté sur

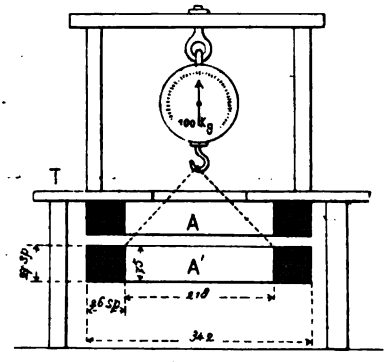

Fig. 294.

la figure 295 et dans lequel le solénoïde inférieur est placé sur le plateau d'une balance à ressort dont la tige est guidée en ligne droite.

Les efforts développés avaient pour conséquence une flexion du ressort du peson et par conséquent un déplacement du plateau qui entraînait une variation de la distance des deux solénoïdes. C'était là un inconvénient auquel on aurait pu remédier au moyen d'un

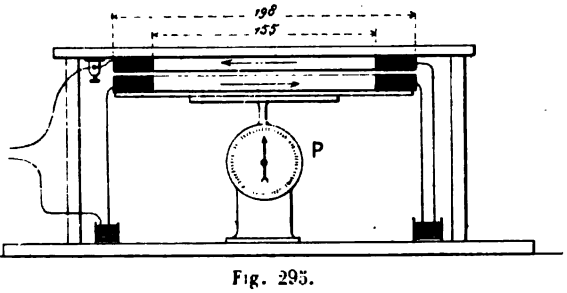

Fig. 295.

dispositif permettant de relever la balance à mesure que le plateau s'abaissait. Mais ces expériences n'ayant pour but que de déterminer l'ordre de grandeur des efforts que l'on pouvait développer, cette précaution ne fut pas prise.

On trouva que les efforts développés étaient sensiblement proportionnels au carré de l'intensité du courant ; la proportionnalité

Digitized by Google

rigoureuse n'eût été possible que si les deux solénoïdes avaient toujours été ramenés à la même distance.

L'effort le plus considérable que l'on ait constaté atteignait 93 kilogrammes ; l'intensité du courant dépassait 26 ampères.

Le résultat le plus intéressant de ces expériences, c'est que pour développer un effort de 1 kilogramme avec des bobines de mêmes dimensions que celles représentées sur la figure, il faut dépenser dans le fil, une quantité d'énergie transformée en chaleur égale à 50 watts environ.

Digitized by Google

ERRATUM

Page	Ligne	Au lieu de :	Lire :
76	17	mais m étant aussi une sphère	mais m_1 étant aussi une sphère
89	14	$C = \frac{1}{L} = L^{-1}$	$C = L$
	16	représentée par l'inverse d'une longueur,	représentée par une longueur
97	16	$\frac{W'}{W} = k\frac{W'}{W}$	$\frac{W'}{W} = k$
106	9	On a omis de multiplier le second membre de l'équation qui donne la valeur de C, par le pouvoir inducteur spécifique du mica qui est désigné dans la ligne précédente par k' et qui est égal à 8.	En rectifiant cette erreur, on trouve $C = 19099$ au lieu de 2387. On trouve également que le nombre 0,265 donné à la ligne 13 doit être remplacé par 2,12.
121 à 127		Les alinéas compris entre le n° 118 et le n° 123 ne sont pas rangés dans l'ordre convenable.	On doit les lire dans l'ordre suivant : 118-120-121-122-119-123
324	24	$\mathcal{H} = \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{F}{2\pi s}}$	$\mathcal{H} = \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{F}{\pi s}}$
341	1	27 millimètres de diamètre	27 millimètres de longueur
370	1	État véritable	État variable
587	13	(402)	(403)

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

ÉLECTRICITÉ STATIQUE

CHAPITRE PREMIER

Théorèmes généraux. — Unités fondamentales.

Pages

§ 1. — Généralités. 1
» 2. — Vitesse. — Accélération. 3
» 3. — Force. — Travail. — Force vive. — Moment d'une force. 4
» 4. — Principe de la conservation de l'énergie. — Équivalent mécanique de la chaleur. — Applications 12
» 5. — Potentiel gravifique. . . 18
» 6. — Lignes de force. — Flux de force. — Tubes de force. 30
» 7. — Théorème de Green. . . 37

CHAPITRE DEUXIÈME

Actions mécaniques mutuelles des corps électrisés.

§ 1. — Propriétés des corps électrisés. — Assimilation de l'Électricité à un fluide. — Définitions. 43

Pages

§ 2. — Actions mécaniques de l'Électricité. — Lois de Coulomb. 46
» 3. — Distribution de l'Electricité à la surface d'un corps conducteur. . . 49
» 4. — Potentiel électrique. . . 56
» 5. — Expression du travail électrique 64
» 6. — Phénomènes qui accompagnent la réunion de deux corps conducteurs par un fil métallique. 69
» 7. — Mesure du potentiel d'un corps au moyen de la balance de Coulomb. 75

CHAPITRE TROISIÈME

Induction électrostatique.

§ 1. — Généralités. — Définitions. 80
» 2. — Capacité des condensateurs. 85
» 3. — Différents condensateurs. — Pouvoir inducteur spécifique 92

Digitized by Google

Pages

§ 4. — Emploi des condensateurs. 100
» 5. — Groupement des condensateurs. 106
» 6. — Énergie potentielle d'un condensateur. 111
» 7. — Condensateurs à capacité variable 118
» 8. — Propriétés mécaniques des condensateurs à lame d'air. 124
» 9. — Propriétés mécaniques des condensateurs à lame diélectrique. . . 132
» 10. — Emploi des condensateurs comme transformateurs. — Machines électrostatiques. . . . 151

CHAPITRE QUATRIÈME

Électrométrie.

Pages

§ 1. — Électromètres absolus. . 162
» 2. — Autres électromètres absolus. 183
» 3. — Des électromètres gradués expérimentalement. 189
» 4. — Mesure du potentiel. . . 195
» 5. — Électromètres de laboratoires 206
» 6. — Électromètres industriels 218
» 7. — Mesure d'une quantité d'électricité 223
» 8. — Mesure de la capacité des condensateurs . . 225
» 9 — Mesure du pouvoir inducteur spécifique . . 233

DEUXIÈME PARTIE

MAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

Définitions et lois des phénomènes magnétiques.

§ 1. — Phénomènes fondamentaux présentés par les aimants 243
» 2. — Potentiel magnétique. . 247
» 3. — Champ magnétique. — Moment magnétique . 257
» 4. — Durée des oscillations d'un barreau aimanté dans un champ magnétique. 267
» 5. — Action d'un aimant sur une masse magnétique 272
» 6. — Action des aimants sur les aimants. 275
§ 7. — Propriétés des feuillets magnétiques 287

CHAPITRE DEUXIÈME

Induction magnétique.

§ 1. — Généralités. — Définitions. 311
» 2. — Flux magnétique total. 314

CHAPITRE TROISIÈME

Magnétométrie.

§ 1. — Mesure des forces magnétiques. 336
» 2. — Moment magnétique d'un aimant. 345
» 3. — Magnétisme terrestre . 363

Digitized by Google

TROISIÈME PARTIE

ÉLECTRO-CINÉTIQUE

CHAPITRE PREMIER

Lois d'Ohm.

Pages

§ 1. — Généralités. 367
» 2. — Conductibilité. — Résistance. — Résistance spécifique 370
» 3. — Force électro-motrice. . 382
» 4. — Analogie entre les lois du courant électrique et celles de l'Hydrodynamique. 387
» 5. — Dimensions de la *f. e. m.*, de la *d. d. p.* et de la résistance dans le système d'unités C. G. S. électro-statiques . . . 392
» 6 — Résistance des conducteurs complexes . . . 397
» 7. — Applications diverses de la loi d'Ohm. 408
§ 8. — Extension des lois d'Ohm aux conducteurs à deux et à trois dimensions 419

CHAPITRE DEUXIÈME

Travail électrique du courant.

§ 1. — Loi de Joule 423
» 2. — Applications de la loi de Joule 431

CHAPITRE TROISIÈME

Actions chimiques du courant.

§ 1. — Lois de l'Electrolyse et applications 447
» 2. — Réversibilité des phénomènes électrolytiques. — Polarisation voltaïque. 455
» 3. — Phénomènes thermo-électriques. 468

QUATRIÈME PARTIE

ÉLECTRO-MAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

Actions des courants sur les aimants.

§ 1. — Découverte d'Oersted. — Loi de Biot et Savart . 479
» 2. — Action exercée par un courant sur un pôle magnétique 485
» 3. — Dimensions des grandeurs électriques dans le système électro-magnétique. 498
§ 4. — Action sur un aimant mobile. 501
» 5. — Champ magnétique produit par les courants. 518

CHAPITRE DEUXIÈME

Actions des aimants sur les courants.

§ 1. — Action exercée par un champ magnétique sur un courant mobile . . 528

Digitized by Google

Pages

§ 2. — Action exercée par un champ magnétique sur un élément de conducteur à trois dimensions. 538

CHAPITRE TROISIÈME

Travail produit par le déplacement relatif d'un système d'aimants et de courants.

§ 1. — Travail produit par le déplacement d'un conducteur dans un champ magnétique. 546
» 2. — Travail produit par la rotation de masses magnétiques autour d'un courant 560

Pages

§ 3. — Travail produit pendant la rotation d'un courant autour de masses magnétiques 565
» 4. — Potentiel magnétique d'un courant fermé . . 572

CHAPITRE QUATRIÈME

Aimantation produite par les courants.

§ 1. — Propriétés des circuits fermés qui contiennent un métal magnétique. 581
» 2. — Applications 588
» 3. — Composition des champs magnétiques 593
» 4 — Similitude des systèmes électro-magnétiques. . 600

CINQUIÈME PARTIE

ÉLECTRO-DYNAMIQUE

CHAPITRE UNIQUE

Actions électro-dynamiques.

§ 1. — Lois d'Ampère et applications 603
» 2. — Similitude des systèmes électro-dynamiques. 612

SIXIÈME PARTIE

INDUCTION ÉLECTRO-MAGNÉTIQUE

CHAPITRE PREMIER

Induction due au mouvement relatif de deux systèmes électro-magnétiques.

§ 1. — Induction produite par le déplacement relatif d'un conducteur et d'un aimant. 619

§ 2. — Application des lois de l'induction due au mouvement d'un conducteur dans un champ magnétique . . . 631
» 3. — Courants induits développés dans une masse métallique en mouvement dans un champ magnétique 646

Digitized by Google

Pages

§ 4. — Induction mutuelle produite par le déplacement relatif de deux circuits parcourus par des courants 655

CHAPITRE DEUXIÈME

Induction mutuelle de deux systèmes électro-magnétiques en repos relatif.

§ 1. — Induction mutuelle de deux circuits fixes traversés par des courants variables. 664

» 2. — Energie intrinsèque des courants. 676

§ 3 — Calcul de la valeur des coefficients d'induction dans plusieurs cas usuels 679

» 4. — Etude de l'état variable des courants 686

CHAPITRE TROISIÈME

Courants alternatifs.

§ 1. — Equations générales du courant engendré dans un circuit doué de self-induction par une *f. e. m.* sinusoïdale 703

§ 2. — Résistance apparente d'un circuit parcouru par un courant sinusoïdal 707

» 3. — Définitions et mesure des constantes des courants alternatifs . . . 712

» 4. — Effets produits par un condensateur intercalé dans un circuit doué de self-induction et soumis à l'action d'une *f. e. m.* sinusoïdale. . 727

» 5. — Théorie des bobines d'induction. 733

» 6. — Problèmes sur les courants alternatifs . . . 741

Résistance des métaux et alliages. 746

Résistance des liquides. — Résistance des diélectriques 747

APPENDICE AU PREMIER VOLUME

NOTE I

Expérience de M. Marcel Deprez, sur les distances explosives des étincelles électriques faites avec une machine dynamo-électrique 751

NOTE II

Distribution des quantités de magnétisme dans la région polaire d'un aimant.. 753

NOTE III

Aimant équivalent à un système d'aimants. 756

NOTE IV

Emploi des électro-aimants à la place d'aimants permanents dans la méthode de Gauss 758

NOTE V

Application du système international d'unités électriques dans les marchés de l'État en France. 761

NOTE VI

Démonstration élémentaire des lois de la transmission de l'énergie par l'électricité 767

Digitized by Google

NOTE VII

Pages

Recherches expérimentales sur les efforts développés par un courant solénoïdal, sur un cylindre en fer soumis à son action 773

NOTE VIII

Expérience sur la relation qui existe entre le flux de force magnétique d'un électro-aimant et l'intensité de la force magnétisante 778

NOTE IX

Champs magnétiques tournants . 784

NOTE X

Pages

Marteau-pilon électrique système Marcel Deprez 789

NOTE XI

Production d'un travail mécanique au moyen d'un électro-aimant à pôles tournants, dont l'intensité d'aimantation reste constante. 792

NOTE XII

Efforts mécaniques développés par l'action mutuelle de deux solénoïdes 797

Erratum 800

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

Digitized by Google

Digitized by Google

B89089681399A

b89089681399
b89089681399a